Theoretische Mechanik - Zusammenfassung

Zusammenfassung: Fabian Stutzki

28. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Koordinatensysteme

1.1 Ebene Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

2 Newtonsche Axiome

1. Trägheitsgesetz: Es gibt Koordinatensysteme, in denen sich ein kräftefreier Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. (Inertialsysteme)

2. Aktionsprinzip:
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$$

3. action=reactio: Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (action), so wirkt eine gleich große, entgegengerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).

3 d'Alembertsches Prinzip

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$$

$\vec{Z}$ leistet keine Arbeit:

$$\vec{Z}\delta r = (m\ddot{\vec{r}} - \vec{K})\delta r = 0$$

4 Lagrange I

Nebenbedingungen $g_i(\vec{r}, t) = 0$

$$(m\ddot{\vec{r}} - \vec{K} - \sum_i \lambda_i \mathrm{grad}\, g_i)\delta\vec{r} = 0$$

Da $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ beliebig wählbar, muss der Vorfaktor gleich Null sein. Es ergibt sich die Lagrange I-Gleichung (bsp. x-Koordinate):

$$m\ddot{x} = K_x + \sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x}$$

Lösen des Problems in vier Schritten:

1. Koordinatensystem wählen und Nebenbedingungen formulieren
2. Lagrange I Gleichungen aufstellen
3. λ bestimmen über zweite Zeitableitung der Nebenbedingungen, Beschleunigungen mit LI eliminieren, Geschwindigkeiten über Energieerhaltung.
4. λ einsetzen und Bewegungsgleichungen bestimmen

5 Lagrange II

q_k generalisierte Koordinaten, $\dot{q}_k$ generalisierte Geschwindigkeiten, Lagrange-Funktion setzt sich aus kinetischer T und potentieller Energie U zusammen:

$$L = T(q_k, \dot{q}_k, t) - U(q_k, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Versuchen möglichst viele zyklische Koordinaten q_i zu finden, für die gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = P_i \text{ generalisierter Impuls}$$

Energiesatz ergibt sich aus $\frac{dL}{dt}$ zu

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

(Erhaltung $\Leftrightarrow L \neq f(t) \Leftrightarrow L$ invariant bezüglich t)

6 Hamilton-Prinzip

Die wirkliche Bahn ist gegenüber anderen denkbaren Bahnen dadurch ausgezeichnet, dass das Wirkungsintegral ein Extremwert (meist Minimum) annimmt. (Prinzip der kleinsten Wirkung)

$$\delta W = \delta \int_1^2 L\, dt = 0$$

Bedingungen an Vergleichsbahnen:

1. Bahnen haben gleichen Anfangs- und Endpunkt
2. Vergleichsbahnen müssen zur realen Bahn benachbart sein:

$$q_k'(t) = q_k(t) + \delta q_k(t)$$

3. Vergleich bei fester Zeit: $\delta t = 0$

7 Allgemeines

- Kreisbewegung $v = \omega r$
- Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$, Kraft $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, konservative Kraft $\vec{F}_{kons} = -\operatorname{grad} U$
- Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, Drehmoment $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$ (Drehimpulserhaltung für Zentralkraftfeld)
- Potentiale: Gravitation $-\frac{GmM}{r}$ Feder $-\frac{k}{2}x^2$
  kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$ oder $T_{rot} = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2$
- Energiebilanz

$$\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \vec{Z} \qquad | \cdot \dot{\vec{r}} \\
m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = \dot{T} &= \vec{F}_{kons}\dot{\vec{r}} + \vec{F}_{diss}\dot{\vec{r}} + \vec{Z}\dot{\vec{r}} \\
\dot{T} + \dot{U} &= \dot{E} = \left(\vec{F}_{diss} + \vec{Z}\right)\dot{\vec{r}}
\end{aligned}$$

- Schwerpunktsatz $M\ddot{\vec{s}} = \sum_i K_i^a$ mit Schwerpunktvektor $\vec{s} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$
- Virialsatz $\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_i \vec{r}_i \operatorname{grad}_i U}$