Lineare Algebra I - Zusammenfassung

Vorlesung: Prof. Dr. Külshammer
Zusammenfassung: Fabian Stutzki

3. Januar 2006

Die Zusammenfassung bezieht sich auf Lineare Algebra I (WS04/05). Diese Vorlesung wurde von Herrn Prof. Dr. Külshammer gehalten. Fehler (auch bei kleineren Tipfehlern) und Anmerkungen bitte an fabian.stutzki@uni-jena.de melden.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der Logik

2 Mengenlehre

3 Relationen und Abbildungen

Abbildung $f : M \to N$:

injektiv $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

surjektiv $\Leftrightarrow$ zu jedem $y \in N$ $\exists x \in M : \; y = f(x)$

bijektiv $\Leftrightarrow$ injektiv und surjektiv

Komposition: Abb. $g \circ f : M \to P, x \mapsto g(f(x))$ für Abb. $f : M \to N$, $g : N \to P$

4 Algebraische Grundbegriffe

4.1 Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$, das aus einer Menge G und Verknüpfung $*$ auf G besteht, für das gilt:

- $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)
- $\exists! e \in G : \quad e * a = a = a * e$ (neutrales Element)
- $\forall a \in G \quad \exists! a' \in G : \quad a * a' = e = a' * a$ (inverses Element)
- abelsch (kommutativ) $:\Leftrightarrow \ a * b = b * a \quad \forall a, b \in G$

4.2 Körper

Ein Körper (field) ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, das aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf K besteht, für das gilt:

- $(K, +)$ abelsche Gruppe mit Nullelement 0
- $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe mit Einselement 1
- Distributivgesetz $a(b + c) = ab + bc \quad \forall a, b, c \in K$

5 Vektorräume

5.1 Vektorraum

Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, das aus einer Menge V, Addition und skalarer Multiplikation besteht, für das gilt:

- $(V, +)$ abelsche Gruppe
- $(a + b)v = av + bv \quad \forall a, b \in K, v \in V$
- $a(v + w) = av + aw \quad \forall a \in K, v, w \in V$
- $a(bv) = (ab)v \quad \forall a, b \in K, v \in V$
- $1_k v = v \quad \forall v \in V$

5.2 Untervektorraum

Eine nicht leere Teilmenge eines K-Vr V heißt Untervektorraum von V, falls gilt:

- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
- $a \in K, u \in U \Rightarrow au \in U$

Untervektorräume mit der Dimension $n - 1$ im n-dim. Vektorraum nennt man Hyperebenen. Direkte Summe $U_1 \oplus U_2 \quad \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Für zwei Untervektorräume U_1 und U_2 eines endl-dim Vr gilt $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

6 Lineare Gleichungssysteme

Inhomogenes LGS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Für $b_1 = \ldots = b_m = 0$ nennt man das LGS homogen.

Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

6.1 Gauß-Algorithmus

Ein gegebenes LGS kann durch systematische elementare Umformungen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden, sodass man die Lösungen direkt ablesen kann. Es gibt folgende elementare Umformungen:

1. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen
2. Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar aus K

7 Matrizen

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißt

linksinventierbar: $\Leftrightarrow \quad \exists B \in K^{n \times m} : BA = 1_n$

rechtsinventierbar: $\Leftrightarrow \quad \exists C \in K^{n \times m} : AC = 1_m$

invertierbar: $(A \in GL(n, K)) \quad \Leftrightarrow$ links- und rechtsinvertierbar

quadratisch: Spalten- gleich Zeilenanzahl

symmetrisch: $A^T = A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

schiefsymmetrisch: $A^T = -A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$

ähnlich $A \approx B$: $\exists S \in GL(n, K) : \quad B = S^{-1}AS$

äquivalent $A \sim B$: A durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in B überführen

zeilenäquivalent $A \overset{Z}{\sim} B$: A durch elementare Zeilenumformungen in B überführen

spaltenäquivalent $A \overset{S}{\sim} B$: A durch elementare Spaltenumformungen in B überführen

diagonalisierbar: Die Matrix ist zu einer Diagonalmatrix ähnlich (Eigenwerte)

orthogonal: Es gilt $A^T A = 1_m \quad (A^T = A^{-1})$

Rang: Zahl der Zeilen und Spalten in der reduzierten Zeilen-/Spaltenstufenform, die ungleich 0 sind. (Zeilenrang = Spaltenrang)

Spur: Die Spur ist die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen $spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

7.1 QR-Zerlegung von Matrizen

Eine Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ lässt sich als Produkt einer Matrix $Q \in O(n)$und einer Dreiecksmatrix R mit nur positiven Elementen auf der Hauptdiagonale darstellen. $A = QR$ Dabei wendet man das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Spaltenvektoren $a_1, \ldots a_n$ der Matrix A an, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{GSV}{\Rightarrow} \begin{array}{l} b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1) \\ b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \end{array} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} (a_1|b_1) & (a_2|b_1) & (a_3|b_1) \\ 0 & (a_2|b_2) & (a_3|b_2) \\ 0 & 0 & (a_3|b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & s\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

8 Basis und Dimension

Ein Vektorraum V heißt von endlicher Dimension oder n-dimensional ($dimV = n$), wenn n linear unabhängige Vektoren $b_1, e_2 \ldots, b_n$ existieren, die V aufspannen. Die Menge $\{b_1, b_2 \ldots, b_n\}$ heißt dann eine Basis von V.

8.1 Linearkombination

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r \in V$ nennt man Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2 \ldots v_r$ aus dem Vektorraum V über K mit $\lambda_i \in K$

8.2 Standardbasis

Die Einheitsvektoren $e_1, ...e_n$ bilden eine Standardbasis (kanonische Basis) des K^n. Für den K^3 bilden $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$ die Standardbasis.

8.3 Dimension

Zwei Basen eines K-Vrs V haben die gleiche Anzahl von Vektoren, sie heißt Dimension von V ($dimV = n$). Besitzt V keine endliche Basis, so schreibt man $dimV = \infty$

9 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen K-Vr V und W heißt linear oder Homomorphismus ($f \in Hom(V, W)$), wenn gilt:

- $f(0) = 0$
- $f(x + y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in V$
- $af(x) = f(ax)\ \forall a \in K, x \in V$

Besondere Bezeichnungen:

Monomorphismus: injektive lineare Abbildung (Ker(f) = $\{0\}$, Rang(A) = 0)

Epimorphismus: surjektive lineare Abbildung

Isomorphismus: bijektive lineare Abbildung

Endomorphismus: End(V) = Hom(V, V) = $\{f : V \rightarrow V : f \text{ linear}\}$ (A ist quadratisch)

Automorphismus: Aut(V) = $GL(V) = \{f \in \text{End}(V) : f \text{ bijektiv}\}$ ($GL(V)$ heisst allgemeine lineare Gruppe auf V (general linear group), A hat vollen Rang und $|A| \neq 0$)

Bild: Bld(f) = $\{f(v) : v \in V\}$, eine Basis ergibt sich über die Zeilen der Abbildungsmatrix in Zeilenstufenform

Kern: Ker(f) = Urbld$\{0\}$ = $\{v \in V : f(v) = 0\}$ und $A \cdot v = 0\ v \in V$, man bestimmt die Lösung eines homogenen Gleichungssystems. Generell gilt dim$V$ = dim Ker(f) + dim Bld(f)

10 Lineare Abbildungen und Matrizen

Eine lineare Abbildung f von V nach W (dim$V = n$, dim$W = m$) kann als $m \times n$-Matrix bezüglich jeden Paars von Basen in V und W dargestellt werden.

Beispiel 1: Die lineare Abbildung $f(v) = f(x, y) = (3x + y, 2x + 5y) = w$ kann bezüglich der Standardbasen auch so dargestellt werden:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 2x + 5y \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung ändert sich bei einem Basenwechsel. Möchte man die Matrix bezüglich einer Basis $f_1 = (1,1)$ und $f_2 = (-1,0)$ darstellen, so muss diese umgerechnet werden. Die neuen Basen lassen sich als Linearkombination der alten darstellen $f_1 = (1,1) = 1e_1 + 1e_2$ und $f_2 = (-1,0) = -e_1$, sodass sich eine Übergangsmatrix $P_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $P \cdot v_f = v_e$ ergibt. Die Matrix A_f ergibt sich zu $A_f = P_{f \to e} A_e P_{e \to f} = P^{-1}AP$.

Beispiel 2: Eine Lineare Abbildung von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich der Standardbasis soll bezüglich $b_1 = (1,2,3), b_2, b_3$ und $c_1 = (1,2,3,4), c_2 = (0,1,2,3), c_3 = (0,0,1,2), c_4 = (0,0,0,1)$ (in Matrix A als Spalten eingetragen) dargestellt werden. Dann ergebe sich $f(b_1) = (9,4,5,13) \stackrel{!}{=} rc_1 + sc_2 + tc_3 + uc_4$, sodass ein Vergleich mit A ergibt: $9 = r$,$4 = 2r + s$,$5 = 3r + 2s + t$,$13 = 4r + 3s + 2t + u$. Die erste Spalte der Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis ergibt sich $(9, -14, 6, 7)$.

11 Determinanten

Die Determinante ordnet jeder quadratischen Matrix eine Zahl zu. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ergibt sich:

$$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Entwicklung nach der i-ten Zeile (Laplace'scher Entwicklungssatz) an einem Beispiel. Die Untermatrix ergibt sich durch Streichen der i-ten Zeile und entsprechender Spalte, dabei wechselt das Vorzeichen in einem Schachbrettmuster.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3$$

Es ergeben sich für Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ folgende Rechenregeln $|A||B| = |AB|$,$|rA| = r^n |A|$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ und $|A| = |A^T|$.

12 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenvektoren einer Matrix sind Vektoren, auf welche die Anwendung ein skalares Vielfaches ihrer selbst ergeben. Den entsprechenden Skalar nennt man Eigenwert. Obwohl der Nullvektor diese Eigenschaft für jedens Skalar erfüllt, wird er nicht als Eigenvektor bezeichnet.

r ist ein Eigenwert von $f \in Hom(V) \Leftrightarrow det(r \cdot 1_n - A) = 0$

$det(r \cdot 1_n - A)$ wird als charakteristisches Polynom bezeichnet, die Nullstellen sind demnach die gesuchten Eigenwerte. Es ergeben sich Eigenräume $E_r(f) = Ker(r1_n - A)$, dessen Basen sich über den Gauß-Algorithmus bestimmen lassen. Anders geschrieben ergeben sich die Eigenvektoren v_r über $(r \cdot 1_n - A) \cdot v_r = 0$. Insgesamt kann man A diagonalisieren, denn es gilt $A = S^{-1}DS$ mit der Diagonalmatrix D (Eigenwerte auf der Diagonalen) und der Matrix S mit den Eigenvektoren in den Spalten.

13 Euklidische Vektorräume

Einen reellen Vektorraum mit Skalarprodukt nennt man euklidischen Vektorraum.

Norm oder Länge: $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$

Distanz: $d(v, w) = \|v - w\|$

Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Satz des Pythagoras: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v|w)$

Parallelogrammgleichung: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$

13.1 Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto (v|w)$ mit folgenden Eigenschaften

- $(v + v'|w) = (v|w) + (v'|w) \quad \forall v, v', w \in V, a \in \mathbb{R}$
- $(av|w) = a(v|w)$
- $(v|w) = (w|v)$
- $(v|v) > 0 \quad \forall v \in V\{0\}$

Besondere Bezeichnungen:

Ungleichung von Cauchy und Schwarz (CSU): $\forall x, y \in V$ gilt $(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$

Standardskalarprodukt: Die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x|y)$ mit $(x|y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ nennt man Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

13.2 Orthonormalisierungsverfahren

Elemente v, w eines eukl. Vr mit $(v|w) = 0$ nennt man senkrecht oder orthogonal ($v \perp w$). Bilden $v_1, \dots v_n$ eine Basis von V und gilt $v_i \perp v_j \forall i \neq j$ so nennt man sie eine Orthonormalbasis. Eine beliebige Basis $a_1, \dots a_n$ lässt sich in eine Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahren überführen. Man setzt $b_1 = \frac{a_1}{\|a\|}$ und berechnet die folgenden Vektoren $b_k = \frac{c_k}{\|c_k\|}$ mit $c_k = a_k - (a_k|b_1) \cdot b_1 - \dots - (a_k|b_{k-1}) \cdot b_{k-1}$.

13.3 Meßwerte approximieren

Man sucht eine Gerade $y = ax + b$, die gegebene Messwerte gut approximiert. Seien Meßwerte $(2;8)$,$(3;10)$ und $(-5;-3)$ gegeben, dann setzt man $v_1 = (2,3,-5)$, $v_2 = (1,1,1)$ und $v = (8,10,-3)$. Über das Gram-Schmidt-Verfahren erhält man eine ONB von U mit $u_1 = \frac{1}{\sqrt{38}}(2,3,-5)$ und $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, sodass sich $u_0 = (v|u_1)u_1 + (v|u_2)u_2 = \frac{1}{38}(312, 373, -115)$ ergibt. Wegen $u_0 = av_1 + bv_2$ gilt $\frac{312}{38} = 2a + b$ und $\frac{373}{38} = 3a + b$, sodass die Gerade die Parameter $a = \frac{61}{38}$ und $b = \frac{190}{38}$ besitzt.

14 Isometrien

Eine Abbildung $f : V \to W$ mit $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ für alle x,y nennt man Isometrie. f erhält die Längen von Vektoren und Winkel zwischen den Vektoren. Für die Matrix A von f gilt $A^T A = 1_m$ (A heißt orthogonal, $A^T = A^{-1}$, $det(A) = \pm 1$).

Isometrien $g : V \to V$ nennt man orthogonale Transformationen und schreibt $O(V) = \{g : V \to V : g \text{ Isometrie } \}$. Zwei euklidische Vektorräume nennt man isometrisch isomorph, falls eine bijektive Isometrie $h : V \to W$ existiert (V und W haben dann gleiche Dimensionen).

15 selbst-adjungierte Abbildungen

$f \in End(V)$ mit $(f(x)|y) = (x|f(y))$ auf dem euklidischen Vektorraum V nennt man selbst-adjungierte Abbildung. Die Matrix von f bezüglich einer ONB ist symmetrisch. Da jede symmetrische Matrix einen reellen Eigenwert besitzt, existiert eine ONB, die aus Eigenvektoren von f besteht. A ist diagonalisierbar mit einer orthogonalen Matrix S, sodass $S^{-1}AS = S^T AS$ gilt.

Beispiel: Matrix von f bezüglich der Standardbasis sei $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist eine ONB von V, die aus Eigenvektoren von f besteht. Das charakteristische Polynom ergibt sich zu $(r-4)(r-7)^2 = 0$, die Eigenvektoren sind zum Beispiel $c_1 = (1,1,1)$, $c_2 = (1,-1,0)$ und $c_3 = (1,0,-1)$. Über das Gram-Schmidt-Verfahren ergeben sich folgende orthonormierte Basisvektoren $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,$b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ sowie die Matrix bezüglich b_1, b_2, b_3 zu $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$