Zusammenfassung - Mathematik-Vorkurs für Physiker

Vorlesung: Prof. Dr. Lotze, Wintersemester 2004/05

Inhaltsverzeichnis

Die Exponentialfunktion

Verwendung

- radioaktiver Zerfall
- Biologie
- Wirtschaftsentwicklung
- Dämpfung

Definition, Eigenschaften

- Physikalisches Beispiel: Lichtabsorption an einer Glasplatte
- Mathematisches Beispiel: Idee der Differentialrechnung

Wachstum und Zerfall

Wachstum	**Zerfall**
$y = Ae^{cx}$ für $c > 0$	$y = Ae^{-cx}$ für $c > 0$
Verdoppelungszeit $T_2 = \frac{\ln(2)}{c}$	Halbwertszeit $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{c}$ (Achtung: für $c > 0$)

Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y &= Ae^{cx} \\ y' &= cAe^{cx} = cy \Leftarrow \textit{Differentialgleichung} \end{aligned}$$

Die Änderung einer Größe ist proportional zu sich selbst.
Erweiterte Form

$$\begin{aligned} y' &= cy + d \text{ (Durch Substitution)} \\ y &= Ae^{cx} - \frac{d}{c} \end{aligned}$$

Hyperbelfunktionen

Sinus Hyperbolicus

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

- Punktsymmetrisch
- Näherungsfunktion: $\sinh(x) \to \frac{1}{2}e^x$ (Annäherung von unten)

Cosinus Hyperbolicus

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

- Achsensymmetrisch
- Näherungsfunktion: $\cosh(x) \to \frac{1}{2}e^x$ (Annäherung von oben)
- bekannt auch als „Kettenlinie“

Tangens Hyperbolicus

$$tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Analogien

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\
\cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
\sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Definition

Zur Erweiterung des Zahlenstrahls der reellen Zahlen auf eine Ebene gibt es eine neue Definition

$$i^2 = -1$$

Darstellungsformen

Standarddarstellung

$$
\begin{aligned}
z = x + iy \text{ für } x, y \in \mathbb{R} \\
x = \Re z \text{ Realteil von z} \\
x = \Im z \text{ Imaginärteil von z} \\
i^2 = -1 \text{ Imaginäre Einheit}
\end{aligned}
$$

Polardarstellung

$$
\begin{aligned}
z &= r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \\
r &= |z| = \sqrt{z\bar{z}} \text{ Betrag von } z \\
\phi &= argz \text{ Argument von } z \\
\tan(\phi) &= \frac{y}{x}, \sin(\phi) = \frac{y}{r} \text{ und } \cos(\phi) = \frac{x}{r} \\
z\bar{z} &= |\cos(\phi) + i\sin(\phi)|^2 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1
\end{aligned}
$$

Exponentialdarstellung

$$
\begin{aligned}
z &= re^{i\phi} \text{ (siehe Formeln von Euler und Moivre)} \\
i &= e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} \\
-1 &= e^{i(\pi+2n\pi)} \\
-i &= e^{i(\frac{3}{2}\pi+2n\pi)}
\end{aligned}
$$

Rechenregeln und - beispiele

$$z_1 = x_1 + iy_1 und z_2 = x_2 + iy_2$$

konjugiert komplex

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \quad \rightarrow \quad \bar{z} = x - iy \quad (i \text{ durch } -i \text{ ersetzen })\\
z + \bar{z} &= 2x \;\Rightarrow\; \Re z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\
z - \bar{z} &= 2iy \;\Rightarrow\; \Im z = y = \frac{1}{2}i(\bar{z} - z)
\end{aligned}
$$

Potenzen von i

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= i \cdot i^2 = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1 \\ \frac{1}{i} &= \frac{1}{i}\frac{i}{i} = -i \end{aligned}$$

Gleichheit

$$z_1 = z_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= x_1 + z_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ z^2 &= (x^2 - y^2) + 2ixy \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2 \quad \text{(reelles Ergebnis)} \end{aligned}$$

Multiplikation in Polardarstellung

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]$$
$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) \quad \text{Moivre-Formel}$$

Division

Imaginärteil durch Erweitern mit $\bar{z}$ aus dem Nenner entfernen

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Radizieren komplexer Zahlen, Kreisteilung

$$z_k = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\phi}{n} + \frac{2\phi k}{n})]$$

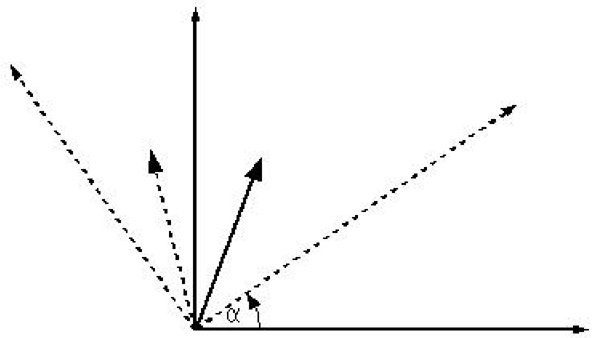

Abbildung 1: Drehung des Koordinatensystems

Die Formeln von Euler und Moivre

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \cos(\phi) + i\sin(\phi) \quad , \; f(0) = 1 \\ f'(\phi) &= -\sin(\phi) + i\sin(\phi) = i(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = if(\phi) \\ \Rightarrow \qquad & \cos(\phi) + i\sin(\phi) \overset{\text{def}}{=} e^{i\phi} \end{aligned}$$

Vektoralgebra: Skalar- und Vektorprodukt

Verwendung

- Darstellung von Bewegungen und Beschleunigungen
- Felddarstellungen

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Das Skalarprodukt ist kommutativ und distributiv, das Assoziativgesetz gilt nicht. Wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, wird das Skalarprodukt null (Orthogonalitätsbedingung):

$$\vec{a} \perp \vec{b} \; \Leftrightarrow \; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Drehung des Koordinatensystems

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j} \\ \vec{j}' &= -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j} \end{aligned}$$

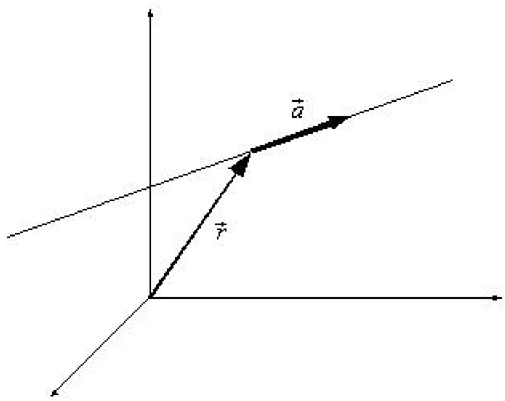

Abbildung 2: Parameterdarstellung einer Geraden

Bei einer Drehung transformieren sich die Vektorkomponenten wie die Basisvektoren. Dabei bleibt ihr Betrag gleich. Auch der Winkel zwischen zwei gedrehten Vektoren verändert sich nicht.

$$\begin{aligned} A'_x &= \cos(\alpha)A_x + \sin(\alpha)A_y \\ A'_y &= -\sin(\alpha)A_x + \cos(\alpha)A_y \end{aligned}$$

Geometrische Anwendung mit physikalischer Bedeutung

Geradendarstellung

Parameterdarstellung einer Geraden

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}$$

Der Abstand zum Ursprung ergibt sich aus folgender Gleichung

$$\vec{r}_{ext} = \vec{r}_0 - \frac{r_0\vec{a}}{a^2}\vec{a}$$

Ebenendarstellung über Normalenvektor

Normalenform einer Ebene

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{n} = 0$$

Achsenabschnittsgleichgung für Ebenen

$$\frac{n_x}{c}x + \frac{n_y}{c}y + \frac{n_z}{c}z = 1$$

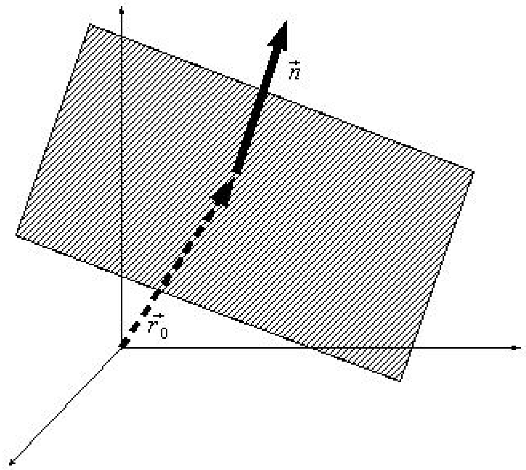

Abbildung 3: Ebenendarstellung über Normalenvektor

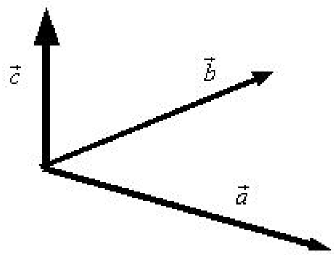

Abbildung 4: Veranschlaulichung zum Vektorprodukt

Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Der resultierende Vektor $\vec{c}$ steht dabei senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, seine Richtung ergibt sich aus der Korkenzieherregel ($\vec{a}$ gedreht in $\vec{b}$ ergibt Richtung von $\vec{c}$) und sein Betrag entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ($c = ab\sin(\sphericalangle\vec{a}, \vec{b})$). Flächen im Raum werden in der Physik daher auch gerne durch einen auf ihnen senkrecht stehenden Vektor mit dem Betrag des Flächeninhaltes dargestellt.

Dreifache Vektorprodukt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Entwicklungssatz für das dreifache Vektorprodukt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Die Ableitung: Definition, Bezeichnung, geometrische Interpretation

Die folgenden Betrachtungen gehen von stetigen und differenzierbaren Funktionen aus.
Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{f(x+\epsilon) + f(x)}{(x+\epsilon) - x}$$

Ableitung

$$\tan(\phi) = \lim(\epsilon \to 0)\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \lim(\epsilon \to 0)\frac{f(x+\epsilon) + f(x)}{(x+\epsilon) - x} = f'(x)$$

Equivalente Schreibweisen:

$$f'(x) \equiv y' \equiv \lim(\Delta x \to 0)\Delta y \equiv \Delta x \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx}f(x) \equiv f^{(1)}(x)$$

Ableitungen höheren Grades werden wie folgt dargestellt

$$y'' \equiv f''(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) \equiv f^{(2)}(x)$$

Ableitungen nach der Zeit werden in der Physik oftmals mit einem Punkt abgekürzt.

$$\frac{d}{dt}f(t) \equiv \dot{f}(t) \equiv \dot{y}$$

Für Bewegungen lässt sich der Dfferenzenquotient als Durchschnittsbewegungen deuten, sein Grenzwert (sprich die Ableitung) entspricht dann der Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t.

Differentiationsregeln

Summenregel

$$\begin{aligned} y &= au(x) + bv(x) + c \\ y' &= au'(x) + bv'(x) \end{aligned}$$

Produktregel

$$\begin{aligned} y &= uv \\ y' &= uv' + vu' \end{aligned}$$

Reziprokenregel

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u} \\ y' &= \frac{-u'}{u^2} \end{aligned}$$

Quotientenregel

$$\begin{aligned} y &= \frac{u}{v} = u\frac{1}{v} \\ y' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \end{aligned}$$

Kettenregel

$$\begin{aligned} y &= v[u] \\ y' &= v'[u] \cdot u' \end{aligned}$$

Umkehrregel, implizites Differenzieren

Am Beispiel

$$\begin{aligned} y(x) &= (\ln x)^{(e^x)} \\ \text{Lösungsweg:} \quad \ln(y(x)) &= e^x \ln(\ln x) \\ \frac{1}{y(x)} y'(x) &= e^x \ln(\ln x) + e^x \frac{1}{x \ln x} \\ y'(x) &= (\ln x)^{(e^x)} e^x (\ln(\ln x) + \frac{1}{(x \ln x)}) \end{aligned}$$

Differentialrechnung mit zwei und drei Variablen

Partielle Ableitung

Partielle Ableitung einer Funktion von zwei Variablen $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x} \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_{0,} y)}{\Delta y} \end{aligned}$$

Kettenregel

$$\begin{aligned} T &= f[x(t), y(t)] \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{Reisegleichung} \end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} \qquad & \frac{\partial}{\delta y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \delta x} = z_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} \qquad & \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \delta y} = z_{yx} \end{aligned}$$

Dabei ist $z_{xy} = z_{yx}$

Geometrische Interpretation: Tangentialebene und Normalenvektor

Tangentialebene

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{n}=0$$

Normalenvektor

$$\vec{n}=-\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{P_0}\vec{i}-\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{P_0}\vec{j}+\vec{k}$$

$$grad f\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$$

Richtungsableitung und Gradient

$$grad f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dz}{ds}=(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j})\cdot(\cos\phi\vec{i}+\sin\phi\vec{j})=grad f\cdot(\cos\phi\vec{i}+\sin\phi\vec{j})$$

Rechnen mit kleinen Größen

Vorbereitende Beispiele

Folgende Näherungen sind nur für sehr kleine x sinnvoll, können die Rechnung aber stark vereinfachen oder gar erst ermöglichen.

- $\sin\phi=\phi$ für $-5^\circ<\phi<5^\circ$ Fehler unter 1 %
- $(1\pm x)^2=1\pm 2x+x^2\approx 1\pm 2x$
- $\sqrt{1\pm x}=y$
  $y^2=1\pm x\approx 1\pm x+\frac{x^2}{4}=(1\pm\frac{x}{2})^2$
  $\Rightarrow y\approx 1\pm\frac{x}{2}$
- $\frac{1}{1\pm x}\approx 1\mp x$

Taylor-Polynome

Viele Funktionen lassen sich über Taylor-Reihen approximieren (annähern).

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

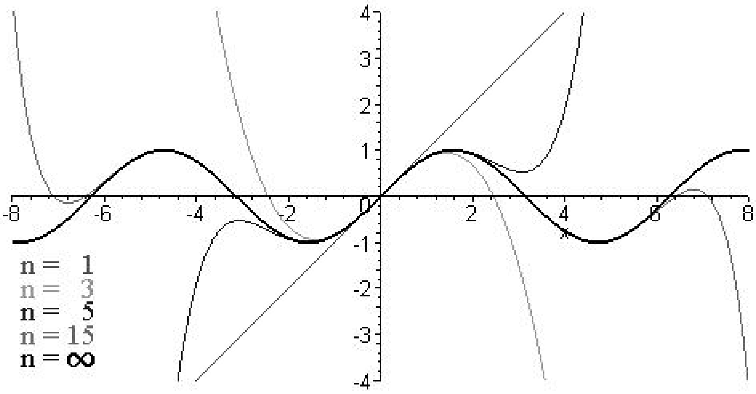

Abbildung 5: Reihenentwicklung des Sinus (www.wikipedia.de)

Beispiele

$$\begin{aligned}\sin x &\approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}...\\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}...\\ e^x &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}...\end{aligned}$$

Die Eulersche Formel (nochmals)

Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion ergibt sich durch Ersetzen von $x \to ix$

$$\begin{aligned}e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + \frac{(ix)^4}{24} + \frac{(ix)^5}{120}\dots\\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + i\frac{x^5}{120}\dots\\ &= (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\dots) + i(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\dots)\\ &= \cos x + i\sin x\end{aligned}$$

Lineare Approximation und Fehlerfortpflanzung

mit einer Variable

$$y = f(x)$$

Taylor-Polynom erster Ordnung ($\approx$ Approximation in x_0)

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Beispiel: Volumenberechnung einer Kugel $V(r)$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Absoluter Fehler (Veranschlaulichung des Fehlers Δr als Kugelschale):

$$\Delta V = \frac{dV}{dr}\Delta r = \frac{4}{3}\pi 3r^2\Delta r = 4\pi r^2\Delta r$$

Relativer Fehler:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2\Delta r 3}{4\pi r^3} = 3\frac{\Delta r}{r}$$

mit zwei Variablen

$$z = f(x, y)$$

$$z - z_0 = \left[\frac{\delta f}{\delta x}\right]_{P_0}(x - x_0) + \left[\frac{\delta f}{\delta y}\right]_{P_0}(y - y_0)$$

$$\Delta z = \frac{\delta f}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\Delta y$$

Beispiel: Schwingungsdauer eines Pendels

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{2}(\frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta g}{g_0})$$

Integralrechnung

„*Gott kümmert sich nicht um unsere mathematischen Schwierigkeiten. Er integriert empirisch.*“ Zitat A.Einstein

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + \boldsymbol{c}$$

beide Seiten ableiten ergibt:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}[F(x) + c] = F'(x) = f(x)$$

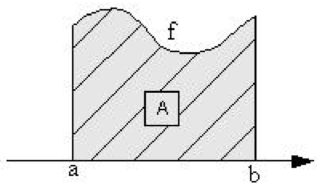

Abbildung 6: Interpretation Riemann-Integral (www.wikipedia.de)

Riemannscher Integralbegriff: Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung

$$\begin{aligned} A_n &\approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \\ A &= \lim_{n\to\infty} A_n = \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Zusammenführung

$$s = \int_{t_a}^{t_e} v(t)\,dt = \int_{t_a}^{t_e} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{t_e}^{t_a} = F(t_e) - F(t_a)$$

Integrationstechniken

Substitution: „Integration der Kettenregel“

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

Partielle Integration: „Integration der Produktregel“

$$\begin{aligned} \int u\frac{dv}{du}\,dx &= uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \\ \int uv' &= uv - \int vu' \quad \text{(u und v geschickt wählen)} \end{aligned}$$