Experimental-Physik
Semester 1 WS04/05 - Kowarschik
Lösungen zu den Übungsaufgaben

Inhaltsverzeichnis

1 Übung 1

1.1 Schiefer Wurf

Wurfweite bestimmen in Abhängigkeit von h, v_0 und α

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) &= \vec{r}_0 = (0, 0, h)\\ \vec{v}(0) &= \vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)\\ \vec{a} &= (0, 0, -g)\end{aligned}$$

Es ergibt sich damit eine Höhenfunktion z(x) in Abhängigkeit von der Weite x:

$$z(x) = h + \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha}$$

Als Wurfweite ergibt sich für $z(x_W) = 0$ bei Betrachtung der positiven Lösung:

$$x_W = \frac{{v_0}^2}{2g} \sin 2\alpha \sqrt{1 + (1 + \frac{2gh}{{v_0}^2 \sin^2\alpha}}$$

1.2 Sichtweite am Horizont

1.3 Flugzeug Rücken- und Gegenwind

Flugzeuggeschwindigkeit v_0 (Zeit ohne Wind $t_{ow} = \frac{2s}{v_0}$), Windgeschwindigkeit w, es ergibt sich für den Hinflug $v_{hin} = v_0 + w$ und Rückflug $v_{ruck} = v_0 - w$.

$$t_{ges} = t_{hin} + t_{ruck}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s}{v_0 + w} + \frac{s}{v_0 - w} \\
&= \frac{2v_0 s}{v_0^2 - w^2} \neq \frac{2s}{v_0}
\end{aligned}
$$

2 Übung 2

2.1 Mittlere Geschwindigkeit eines PKW

Falsche Schätzung wäre:

$$\bar{v} = v_1 + v_2 = \frac{s_1}{s_{ges}} v_1 + \frac{s_2}{s_{ges}} v_2 = \frac{300}{360} 100 \text{ km/h} + \frac{60}{360} 240 \text{ km/h} = 123,3 \text{ km/h}$$

Reisezeiten sind für die mittleren Geschwindigkeiten entscheidend:

$$
\begin{aligned}
t_{ges} &= t_1 + t_2 \\
t_1 &= \frac{s_1}{v_1} = \frac{300}{100} = 3 \text{ h} \\
t_2 &= \frac{s_2}{v} = \frac{60}{240} = 0,25 \text{ h} \\
t_{ges} &= 3,25 \text{ h} \\
\bar{v} &= \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = 110,77 \text{ km/h}
\end{aligned}
$$

2.2 Begegnung zweier Fahrzeuge

2.3 Verspätung an einer Baustelle

3 Übung 3

3.1 Raketengleichung

Herleitung der Raketengeschwindigkeit $v(t)$ bei gegebener Strahlgeschwindigkeit v_s, Massenverlust linear $m(t) = m_0 - \frac{m_t}{T_B} t$

Gewichts- und Rückstoßkraft gleichsetzen:

$$
\begin{aligned}
-m(t)g &= m(t)\frac{dv}{dt} - v_s \frac{dm}{dr} \\
\Longrightarrow \frac{dv}{dt} &= -g + \vec{v}_s \frac{dm/dt}{m(t)} \\
v(t) &= \int \frac{dv}{dt} dt = -gt + v_s \ln \frac{1}{1 - \frac{m_T}{T_B} t}
\end{aligned}
$$

Die Funktion des Ortes ergibt sich wiederum durch Integration (mit Substitution) von $v(t)$, mit $z(0) = 0$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + [\frac{v_s T_B m_0}{m_T} - v_s t] \ln(1 - \frac{m_T}{T_B m_0} t) + v_s t$$

3.2 Geschwindigkeiten nach dem Stoß

3.3 Proton stößt Deuteron

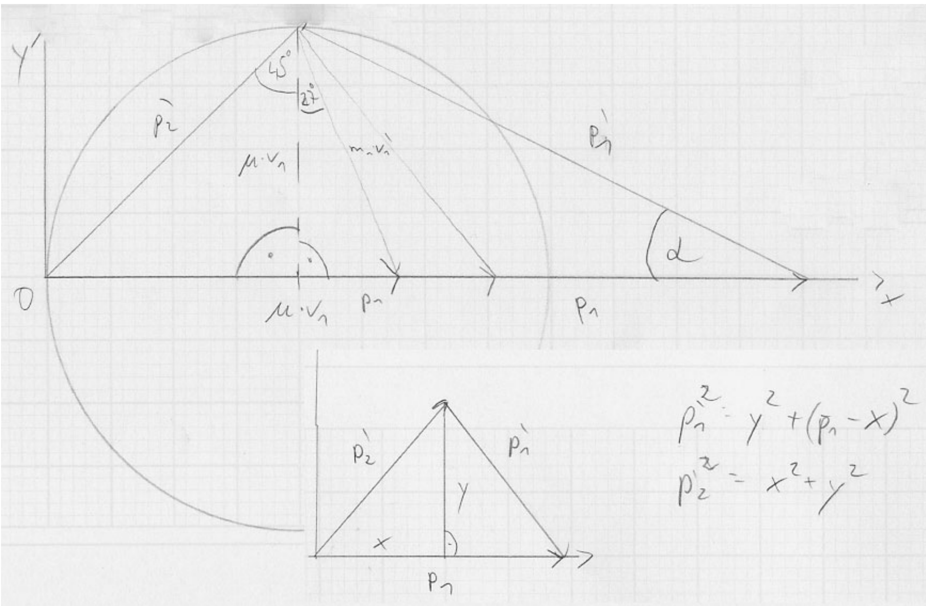

Abbildung 1: Proton stößt Deuteron, Stoßkreis (Ueb 3.1)

Impuls- und Energieerhaltung (reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$):

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1' + p_2' \\
\frac{p_1^2}{2m_1} &= \frac{p_1'^2}{2m_1'} + \frac{p_2^2}{2m_2} \\
\Rightarrow \frac{p_1^1}{2m_1} &= \frac{y^2 + (p_1 - x)^2}{2m_1} + \frac{x^2 + y^2}{2m_2} \\
(\mu v_1)^2 &= (x - \mu v_1)^2 + y^2
\end{aligned}$$

Der Winkel α ergibt sich zu

$$\tan \alpha = \frac{\mu v_1}{p_1 - \mu v_1} = \frac{mu}{m_1 - \mu} \approx 63,4°$$

4 Übung 4

4.1 Rollende Hohl- und Vollzylinder

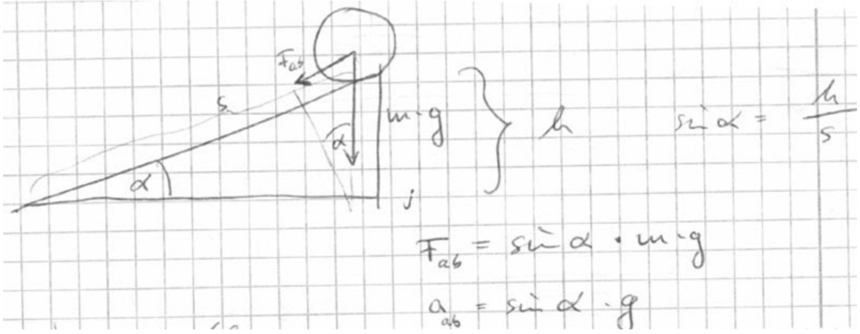

Abbildung 2: Kräfte am Zylinder auf schiefer Ebene (Ueb 4.1)

Trägheitsmoment eines Zylinders:

$$\begin{aligned} I_{hohl} &= \frac{1}{2}m(r_a^2 + r_i^2) \approx mr^2 \\ I_{voll} &= \frac{1}{2}mr^2 \end{aligned}$$

Energieumwandlung von potentieller Energie in Translation und Rotation (I_s Trägheitsmoment bezüglich Schwereachse).

$$\begin{aligned} E_{pot} &= E_{trans} + E_{rot} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_s\omega^2 \\ mgh &= \frac{1}{2}m\sin^2(\alpha)g^2t^2 + \frac{1}{2}I_s\frac{v^2}{r^2} \\ t &= \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}(1 + \frac{I_s}{r^2m})} \end{aligned}$$

Es ergibt sich das Zeitverhältnis $\frac{t_{hohl}}{t_{voll}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, für die Geschwindigkeiten $\frac{v_{hohl}}{v_{voll}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.2 Fluchtgeschwindigkeit Erde/Mond

Masse der Erde M, Masse des Mondes m, Umlaufzeit des Mondes ω_m mit $v = \omega \times r$:

$$F_z = \frac{mv^2}{r} = \gamma\frac{mM}{r^2} = F_{grav}$$

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 r &= \gamma \frac{M}{r^2} \\
\omega_m &= \sqrt{\frac{\gamma M}{r^3}}
\end{aligned}
$$

Erdsatellit (1. kosmische Geschwindigkeit)

$$
\begin{aligned}
F_z = \frac{mv^2}{r} &= \gamma \frac{mM}{r^2} = F_{grav} \\
v_{1kosm} &= \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \approx 7,9 \text{ km/s}
\end{aligned}
$$

Fluchtgeschwindigkeit (2. kosmische Geschwindigkeit)

$$
\begin{aligned}
E_{kin} = \frac{1}{2} m v_{2kosm}^2 &\geq \gamma \frac{Mm}{r} = E_{grav} \\
v_{2kosm} &\geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} \approx 11,2 \text{ km/s}
\end{aligned}
$$

4.3 Rollbewegung der „unartigen“ Garnrolle

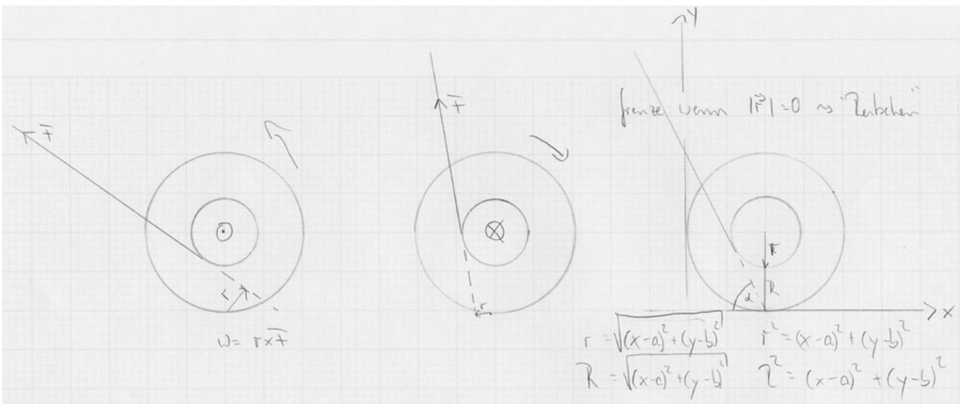

Abbildung 3: Drehmoment an einer Garnrolle(Ueb 4.3)

5 Übung 5

5.1 Rotierende Scheibe mit Drehmoment

$$
M = r \times F, M = \frac{dL}{dt} = I_s \cdot \dot{\omega}, L = \int M dt
$$

Ansatz: Drehimpuls $L = \int M dt$

$$L_{wirk} = \int M dt = \int_{t_0}^{t} D_o e^{-a(t-t_0)} dt = \left[\frac{-D_0}{a} e^{-a(t-t_0)}\right]_{t_0}^{t}$$
$$= \frac{-D_0}{a} e^{-a(t-t_0)} + \frac{D_0}{a}$$

Für den Gesamtdrehimpuls ergibt sich:

$$L_{ges} = I_s \cdot \omega(t) = I_s \cdot \omega_0 + \frac{D_0}{a}\left[1 - e^{-a(t-t_0)}\right]$$
$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{D_0}{a I_s}\left[1 - e^{-a(t-t_0)}\right]$$

Diskussion für a:

- $a = 0$: geradlinige Beschleunigung durch konstant wirkendes Drehmoment.
- $a > 0$: begrenztes Wachstum der Geschwindigkeit
- $a < 0$: exponentielle Geschwindigkeitszunahme

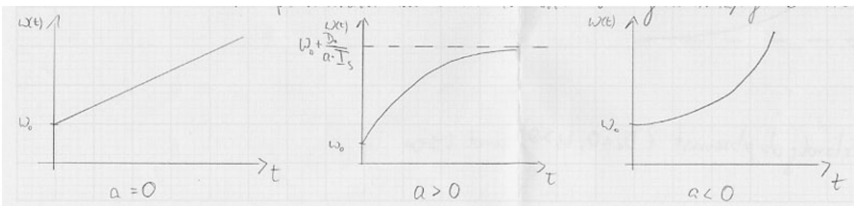

Abbildung 4: Rotierende Scheibe mit wirkendem Drehmoment (Ueb 5.1)

Verlauf für $\frac{\vec{\omega_0}}{\omega_0} = -\frac{\vec{D_0}}{D_0}$:
Die Scheibe wird vollständig gebremst für $\omega_0 = \frac{D_0}{I_s a}$ und $t \to \infty$

5.2 Massenträgheitsmoment eines Kegels

Massenträgheitsmoment einer Kreisscheibe mit $M = \pi R^2 h$

$$I_{Kreisscheibe} = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dV = 2\rho \int_0^R r^2 (\pi r h dr)$$
$$= \frac{\pi}{2} \rho h R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

Der Kegel ($M = \rho\frac{1}{3}\pi R^2 H$) besitzte eine Gesamthöhe H sowie eine Grundfläche mit dem Radius R. Er lässt sich durch Kreisscheiben zusammenbauen, jeweils mit dem aktuellen Radius r und der aktuellen Höhe h. Es ergibt sich das Verhältnis $\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{H}h$

$$\begin{aligned} I_{Kegel} = \int_0^H \frac{1}{2}\rho\pi r^4 dh &= \frac{1}{2}\rho\pi\frac{R^4}{H^4}\int_0^H h^4 dh \\ &= \frac{1}{2}\rho\pi\frac{R^4}{H^4}\int_0^H h^4 dh \\ &= \frac{1}{2}\rho\pi R^4 H\frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{10}MR^2 \end{aligned}$$

5.3 Drehschemelversuch

Der Drehimpuls $L = I\omega = const$ des Stuhles ändert sich nicht, durch das Ausstrecken der Arme vergrößert sich das Trägheitsmoment I, sodass ω kleiner werden muss.

6 Übung 6

6.1 Luftgewehrkugel

Coriolis-Beschleunigung auf Kugel mit der Geschwindigkeit $v_s = v_0 - gt$:

$$\begin{aligned} a_c &= 2(v_s \times \omega_h) = 2v_s\omega_e\cos\phi \\ v_c &= \int a dt = 2\omega_E\cos(\phi)t[v_0 - \frac{g}{2}t] \end{aligned}$$

Es ergibt sich eine Ablenkung s_c von:

$$s_c = \int v dt = \frac{4}{3}\frac{{v_0}^3\omega_E\cos\phi}{g^2}$$

Die Ablenkung am Äquator beträgt $s_{Aqu} = 0,216$ m, bei 51 Grad nur noch $s_{51} = 0,136$ m

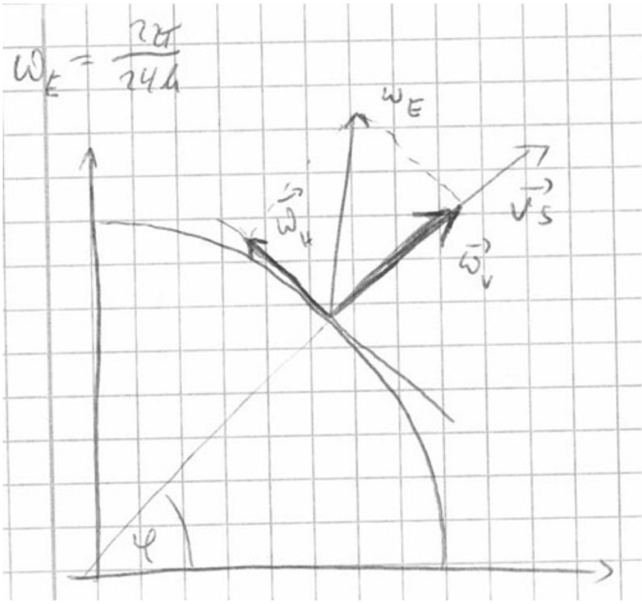

Abbildung 5: Coriolis-Kräfte auf Gewehrkugel, Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit (Ueb 6.1)

6.2 Winkelgeschwindigkeit der Nutation

6.3 Präzessionsgeschwindigkeit

7 Übung 7

7.1 Schwingender Balken

Flächenträgheitsmoment:

$$\Theta = \int\int z^2 dz dy$$

In diesem Fall also:

$$\begin{aligned} \Theta_{hochkant} &= \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} z^2 dz \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy = \frac{1}{12} a^3 b \\ \Theta_{quer} &= \frac{1}{12} b^3 a \end{aligned}$$

Biegepfeil

$$x = \frac{Fl^3}{3E\Theta}$$

Über die Schwingungsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\omega t \\ v &= -r\omega\sin\omega t \\ a &= -r\omega^2\cos\omega t \\ \Longrightarrow a &= -\omega^2 x \\ \Longrightarrow \omega^2 &= \frac{a3E\Theta}{Fl^3} \end{aligned}$$

ergibt sich das Verhältnis $\frac{\omega_h}{\omega_q} = \frac{a}{b}$

7.2 Zugspannung in x-Richtung

7.3 Maximale Länge eines Stahlseils

Maximale Zugspannung $\sigma_{max} = \rho g L$, es ergibt sich $L < \frac{\sigma_{max}}{\rho g} = 1000m$

8 Übung 8

8.1 Druckverlauf in einem Strömungskanal

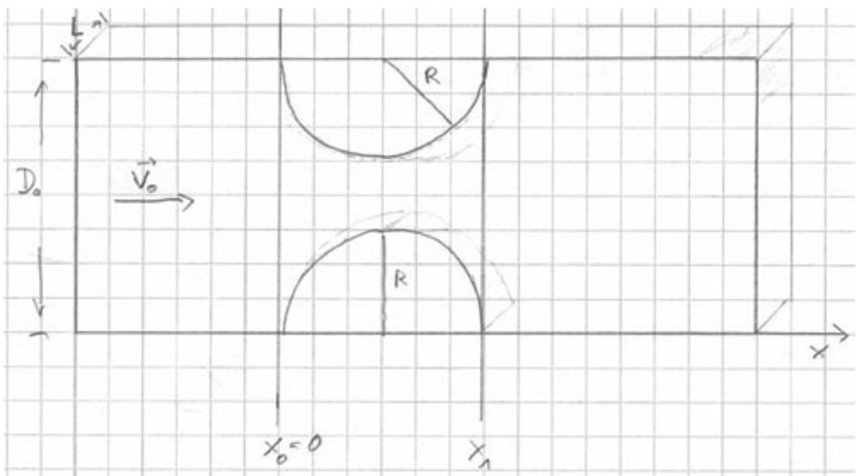

Abbildung 6: Strömungskanal durch zwei Halbkreise verjüngt (Ueb 8.1)

Verjüngung durch zwei Halbkreise

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2 \implies y = \sqrt{2xR - x^2}$$

Die Durchflusshöhe $D(x)$ ergibt sich für den Bereich $0 \leq x \leq 2R$:

$$D(x) = D_0 - 2y = D_0 - 2\sqrt{2xR - x^2}$$

Druckbetrachtung ergibt:

$$v_0 A_0 = v_1 A_1 \implies v_0 L D_0 = v(x) L D(x) \implies v(x) = \frac{v_0 D_0}{D(x)}$$

Über die Bernoulli-Gleichung ergibt sich der Druckverlauf:

$$\begin{aligned} p_{ges} &= \rho g h + \frac{1}{2}\rho[v(x)]^2 + p(x) \\ p(x) &= p_{ges} - \frac{1}{2}\rho[v(x)]^2 = p_{ges} - \frac{\rho v_0^2 d_0^2}{2(D_0 - 2\sqrt{2xR - x^2})^2} \end{aligned}$$

8.2 Krümmungsdruck einer Seifenblase

8.3 Magdeburger Halbkugeln

9 Übung 9

9.1 Behälter mit ausfließendem Wasser

9.2 Luftwiderstand eines LKW

9.3 Dynamischer Auftrieb an einer Tragfläche

10 Übung 10

10.1 Schwingendes System mit zwei Massen

10.2 Schwingung im U-Rohr

Wenn die Flüssigkeit aus der Ruhelage ausgelenkt wird, wird ihr Schwerpunkt nach oben verschoben. Man kann dies so verstehen, dass ein Flüssigkeitsabschnitt der Länge x von einen Schenkel in den anderen verschoben wird. Dessen Gewichtskraft wirkt nun als rücktreibende Kraft und bewirkt eine harmonische Schwingung.

Sei A der Rohrquerschnitt, ρ die Dichte der Flüssigkeit und g die Fallbeschleunigung. Dann ist die Masse der verschobenen Flüssigkeit $2xA\rho$. Die Gewichtskraft beträgt $F = 2xA\rho$. Diese ist als rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung, weshalb sich eine harmonische Schwingung ergibt. Die

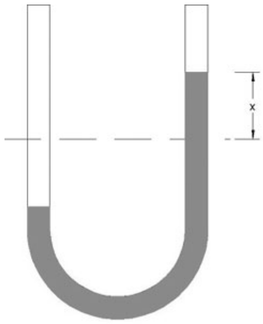

Abbildung 7: Schwingung in einem U-Rohr (Ueb 10.1)

beschleunigte Masse m ist die Gesamtmasse der Flüssigkeit. Daraus ergibt sich

$$\omega^2 = \frac{2A\rho g}{m} = \frac{2Ag}{V} = \frac{2g}{l}$$

wenn V das Flüssigkeitsvolumen und l die Länge der Flüssigkeitssäule sind.

10.3 Schwebung zweier Stimmgabeln

Kommt es zur Interferenz zweier Wellen mit fast gleicher Frequenz, so bezeichnet man die periodische Erscheinung mit dem Begriff Schwebung. Der Ton wird abwechselnd lauter und leiser.

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \sin \omega_1 t \\ p_2 &= p_0 \sin \omega_2 t \\ p &= p_1 + p_2 \\ &= 2p_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \sin 1\ over 2(\omega_1 + \omega_2)t \end{aligned}$$

Mit dem Ohr vernehmt man die mittlere Frequenz $\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$. Die Amplitude $2p_0 \cos(2\pi \frac{1}{2}\Delta\nu t)$ oszilliert also mit der Frequenz $\frac{1}{2}\Delta\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)$. Die Intensität ist zum Quadrat der Amplitude proportional. Die Schwebungsfrequenz ist also $\nu_{Schwebung} = \Delta\nu = (\nu_1 - \nu_2)$

In 10 Sekunden sind 45 Schwebungen zu hören: $\nu_{Schwebung} = \frac{45}{10s} = 4,5Hz$ wodurch sich ν_2 ergibt:

$$\nu_2 = \nu_1 - \nu_{Schwebung} = 440Hz - 4,5Hz = 435,5Hz$$