Lernhilfe zur Diplomprüfung Elektrodynamik

Diese Zusammenfassung wurde für die Vorbereitung auf meine Diplomprüfung erstellt. Bei Fehlern bitte ich um Korrekturhinweise.

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrostatik im Vakuum

1.1 Coulombsches Gesetz

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Proportional zu $\frac{1}{r^2}$, Zentralkraft ($\exists$ Potential), Zweikörperkraft nicht von zusätzlicher Ladung beeinflusst (Kräfte addierbar, Superposition möglich)

1.2 Elektrostatisches Feld

Abstraktion auf Eigenschaft des Raumes, Feldlinien $+ \rightarrow -$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q}$$

mehrere Punktladungen Q_i bei $\mathbf{r}_i$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

kontinuierliche Ladungsverteilung (enthält Spezialfall Punktladungen mit δ-Distribution $\rho(\mathbf{r}') = Q_1 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)$)

$$Q \rightarrow \int_V dV' \rho(\mathbf{r}')$$

1.3 Gausches Gesetz (Durchflutungsgesetz)

Der Fluss des elektrischen Feldes durch eine Oberfläche ist gleich der im Volumen enthaltenen Ladung.

$$\varepsilon_0 \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r})\, \mathbf{df} = Q_V = \int_V \rho(\mathbf{r})\, dV$$

Die gesamte Ladungsdichte ist die Quelle des elektromagnetischen Feldes.

$$\varepsilon_0 \mathbf{div}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

1.3.1 Feldberechnung mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes

nur für hohe Symmetrie praktisch:

- Feld einer geladenen Kugelschale XXX
- Feld eines unendlich langen homogen geladenen Drahtes XXX
- Feld einer unendlich ausgedehnten ebenen homogen geladenen Fläche XXX

1.4 Elektrostatisches Potentital

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}\,\varphi(\mathbf{r}) \qquad \text{mit} \qquad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Wegunabhängigkeit des elektrischen Feldes

$$\int_{(F)} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Dies führt auf die Poissongleichung

$$\varepsilon_0 \mathbf{div}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\varepsilon_0 \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\varphi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

1.5 Elektrischer Dipol

Dipol bei $\mathbf{r}_0$:

$$\begin{aligned} \rho_D(\mathbf{r}) &= -\mathbf{p}\cdot\mathbf{grad}_r\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\ \varphi_D(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \end{aligned}$$

Elektrisches Feld für Dipol bei $\mathbf{r}_0 = 0$:

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{grad}\,)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right] \quad \sim \frac{1}{r^3}$$

- Energie im äußeren Feld: $W_D = -\mathbf{pE}$
- Kraft durch äußeres Feld $\mathbf{F}_D = (\mathbf{pgrad}\,)\mathbf{E}$
- Drehmoment im äußeren Feld $\mathbf{M}_D = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_{homog}$
- Arbeit einen Dipol zu induzieren $W_{D,gen} = \frac{1}{2}\mathbf{pE}$, gewonnene Gesamtarbeit $W_{D,ind} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$

1.6 Multipolentwicklung des elektrischen Potentials

Ziel: Trennung der Quelleigenschaften und des Betrachtungspunktes

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q_{k_1k_2\dots k_l}}{l!r^{2l+1}}x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_l} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_ix_i}{r^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{Q_{ij}x_ix_j}{r^5}+\dots \\
&= \varphi_0(\mathbf{r})+\varphi_1(\mathbf{r})+\varphi_2(\mathbf{r})+\dots
\end{aligned}$$

mit folgenden Multipolmomenten

Ladung

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \sim \frac{1}{r}$$

mit Ladung $Q = \int_{V_\rho} dV'\rho(\mathbf{r}')$

Dipolmoment

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_ix_i}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{pr}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

mit Vektor $\mathbf{p} = \int_{V_\rho} dV'\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'$

Quadrupolmoment

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{Q_{ij}x_ix_j}{r^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{D_{ij}x_ix_j}{r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

mit spurfreiem, symmetrischen Tensor 2. Stufe

$$D_{ij} = \int_{V_\rho} dV'\rho(\mathbf{r}')(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})$$

1.7 Elektrostatische Energie

Energie zum Aufbau von Ladungsverteilungen (innere WW)

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_i\sum_j Q_i\varphi_j \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int dV\,dV'\frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \frac{1}{2}\int dV\varphi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\mathbf{DE}\,dV
\end{aligned}$$

Wechselwirkungsenergie zweier Ladungsverteilungen (äußere WW, Ladungsverteilung 1 im bereits vorhandenen Potential a)

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1} dV \varphi_a(\mathbf{r}')\rho_1(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1} dV \int_{V_a} dV' \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

2 Elektrostatik bei Anwesenheit von Leitern (Randwertproblem der Elektrostatik)

Auf Leitern sind die Ladungsträger frei beweglich. Ein elektrisches Feld würde zu einer Kraft und die wiederum zu einer Bewegung führen, im Leiter darf daher kein Feld existieren. Die Leiteroberfläche ist zudem eine Äquipotentialfläche, womit die $\boldsymbol{E}$-Feldlinien senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen. Quellen und Senken des Feldes befinden sich nur auf der Leiteroberfläche (Normalkomponenten von $\boldsymbol{E}$ daher unstetig, Tangentialkomponenten verschwinden).

2.1 Potential auf Leitern bekannt

Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$, Geometrie der Leiter und Ladung oder Potential auf den Leitern bekannt.

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

2.1.1 Bestimmung der Greenschen Funktion

Die Greensche Funktion wird bestimmt, indem eine Punktladung in den Raum gesetzt wird. Damit muss die GF folgende Bedingungen erfüllen:

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

und $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$ auf dem Rand (Bsp. Kugeloberfläche)
Es bleibt ein geeignetes F zu bestimmen, das folgende Gleichung erfüllt

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad \text{mit}\Delta F = 0$$

Für leitenden Halbraum: Ladung $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ und Scheinladung bei $\mathbf{r}'_s = (-x', y', z')$.
Mit diesem Ansatz ergibt sich

$$G_{Halbraum} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_s|}\right\}$$

Für leitende Kugel: Ansatz Spiegelladung in der Kugel, für die gilt:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}'|}+\frac{A}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}'_s|}=0$$

Es ergeben sich $A=-\frac{R}{r'}$ und $\mathbf{r}'_s=\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'$, insgesamt als Greensche Funktion:

$$G_{Kugel}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{R}{r'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'|}\right\}$$

2.1.2 Potential

Mit dem Geometriekoeffizient $\Gamma_i(\mathbf{r})=-\int_{(V_i)}df'\varepsilon_0\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{n}'}$ (zum Beispiel $\Gamma_{Kugel}=\frac{R}{r}$) erhält man das Potential

$$\varphi(\mathbf{r})=\varphi_\rho(\mathbf{r})+\varphi_i\Gamma_i$$

Aus dem Potential kann die Oberflächenladungsdichte auf den Leitern bestimmt werden

$$\eta=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}}|_{OF}$$

und die Gesamtladung auf einen Leiter i

$$Q_i=\int_{L_i}\eta_i\,df$$

2.2 Gesamtladung auf Leitern bekannt

Lässt sich auf oberen Fall zurückführen, da über die Ladung Q_i und die induzierte Ladung Q_i^{ind} das Potential φ_i jedes Leiters berechnet werden kann.

$$\varphi_i=\sum_i C_{ij}^{-1}(Q_j-Q_j^{ind})$$

mit

$$\begin{aligned}Q_j^{ind}&=-\varepsilon_0\int_{(V_j)}df\frac{\partial\varphi_\rho(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}_j}=\int_{(V_j)}df\,\eta_j(\mathbf{r})\\ C_{ij}=C_{ji}&=-\varepsilon_0\int_{(V_j)}df\frac{\partial\Gamma_i(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{n}_j}\\ &=\varepsilon_0^2\int_{(V_j)}\int_{(V_i)}df\,df'\frac{\partial^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{n}'_i\partial\mathbf{n}_j}\end{aligned}$$

XXX Kapazität S. 95

3 Elektrostatik in Dielektrika

zusätzlich zu externen Ladungen sind Polarisationsladungen als Quellen des Polarisationsfeldes $\mathbf{P}$ zu beachten. Man dührt daher neben dem elektrischen Feld mit $\mathbf{div}\,\mathbf{E} = \rho_{ges} = \rho_{ext} + \rho_{pol}$ noch das dielektrische Feld $\mathbf{D}$ mit $\mathbf{div}\,\mathbf{D} = \rho_{ext}$ sowie das Polarisationsfeld $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{div}\,\mathbf{P} = -\rho_{pol}$ ein.

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{div}\,\mathbf{D} &= \rho_{ext} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Ein Dielektrikum erhöht die externe Ladungsdichte, da für ein konstntes E-Feld die negativen Polarisationsladungen kompensiert werden müssen.

Verschiebungs- bzw. Orientierungspolarisation in erster Näherung linear und proportional zu $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 N \alpha \mathbf{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P} = \frac{N p_0^2}{3kT}\mathbf{E}$$

womit eine Vereinfachung möglich wird

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}$$

Ferroelektrika: spontane Ausrichtung unterhalb Curie-Temperatur $\Rightarrow$ nicht linear

3.1 Übergangsbedingung für elektrische Felder

An Grenzflächen zwischen ε_1 und ε_2 sind die tangentiale E- und normale D-Feldkomponente stetig, die normale E- und tangentiale D-Feldkomponente unstetig. Falls keine externen Ladungen vorhanden sind, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\mathbf{D} = \rho_{ext} \Rightarrow \int_{(V)} \mathbf{D}\,\mathbf{df} = Q_{ext} \doteq 0 \quad &\Rightarrow \quad D_{n1} - D_{n2} = 0 \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \int_{(F)} \mathbf{E}\,\mathbf{dr} = 0 \quad &\Rightarrow \quad E_{t1} - E_{t2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} E_{t1} = E_{t2} & \text{und} & \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \\ \dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_{t2}}{\varepsilon_2} & \text{und} & D_{n1} = D_{n2} \end{array}$$

3.2 Potentialberechnung

für stückweise konstantes ε:

$$-\varepsilon_0 \varepsilon_i \Delta\varphi(\mathbf{r}) = \rho_{ext}$$

und zusätzlich zu den Randbedingungen noch die Übergangsbedingungen

$$D_{n_a} - D_{n_i} = -\varepsilon_0 \varepsilon_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon_0 \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{n}} = \eta_{ext}$$

Es ergibt sich die bekannte Lösung für $\mathbf{r}$ im i-ten Gebiet

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V dV' \rho_{ext}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

3.3 Elektrostatische Energie

Die elektrostatische Energie ergibt sich aus Addition der Erzeugungsenergie $W_{erz} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dV\, \mathbf{E}^2$ und der Wechselwirkungsenergie durch induzierte Dipole $W_P = \frac{1}{2} \int dV\, \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ mit $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$zu

$$W = \frac{1}{2} \int dV\, \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

3.4 Kräfte in dielektrischen Medien

XXX

4 Magnetostatik

bewegte Ladungen bezeichnet man als Strom, stationäre Ströme führen zu zeitunabhängigen Magnetfeldern.

$$I = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r})\, \mathbf{df} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

4.0.1 Kontinuitätsgleichung

Folgt aus $-\delta Q = I \delta t$ oder anders geschrieben $\dot{Q} + I = 0$, wenn man zur Integralform $\int \dot{\rho}(\mathbf{r}) dV + \int \mathbf{j}(\mathbf{r})\, \mathbf{df} = 0$ übergeht und den Gaußschen Satz anwendet

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}, t) + \mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

Vergleiche auch Kapitel 6.1

4.1 Magnetfeld stationärer Ströme

Amperesches Gesetz: Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern 1 auf 2, mit $\varepsilon_0 c^2 = \mu_0^{-1}$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{I_1 \mathbf{ds}_1 \times [I_2 \mathbf{ds}_2 \times (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)]}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2|}$$

Biot-Savartsches Gesetz: Abstraktion von der Kraft auf Feld-Begriff

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{\mathbf{ds} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Feld im Mittelpunkt eines stromdurchflossenen Kreisrings mit Radius R ergibt sich mit $\mathbf{ds} \times (0 - \mathbf{s}) = Rds\boldsymbol{e}_z = R^2 d\varphi \boldsymbol{e}_z$ zu

$$B_{Ring}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{R^2}{R^3} \boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \boldsymbol{e}_z$$

4.1.1 Maxwellgleichungen der Magnetostatik

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\int_{(F)} \mathbf{B}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr} = \mu_0 I_F \qquad \int_{(V)} \mathbf{B}(\mathbf{r})\,\mathbf{df} = 0$$

4.1.2 Vektorpotential

Suchen elegantes Verfahren zur Berechnung von $\mathbf{B}$ (Erinnerung an $\mathbf{E}$ und φ)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \qquad \text{da } \mathbf{div}\,\mathbf{B} = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{rot}\,\mathbf{B} &= \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \stackrel{\circ}{=} \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

Allerdings sind die Komponenten von $\mathbf{A}$ verknüpft, Entkopplung kann durch Coulomb-Eichung erreicht werden (weitere Bedingung durch $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad} = 0$ möglich).

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\mathbf{A}' &= 0 \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \mathbf{grad}\,f \end{aligned}$$

Man erhält eine Poissongleichung für jede Komponente des Vektorpotentials $\mathbf{A}$

$$-\Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$$

mit der bekannten Lösung

$$\mathbf{A} = \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

4.2 Multipolentwicklung

nur bis Dipol, da $\mathbf{B}$-Feld c^2 schwächer als $\mathbf{E}$-Feld.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}') + \ldots$$

Monopolmoment verschwindet, da $\mathbf{div}\,\mathbf{B} = 0$

Dipolmoment

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{mit } \mathbf{m} = \frac{\mu_0}{2}\int_V dV' \, [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')]$$

Magnetfeld eines Dipols

$$\mathbf{B}_{Dipol} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{rot}\,\frac{[\mathbf{m}\times\mathbf{r}]}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{m}) - \mathbf{m}r^2}{r^5}$$

4.3 Magnetfeld in Materie

Die Wirbel des **H**-Feldes sind die makroskopischen Ströme, die Quellen des **H**-Feldes sind die Senken des Magnetisierungsfeldes **M**, das **B**-Feld ist quellenfrei.

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{H} &= \mathbf{j}_{makro} \\ \mathbf{div}\,\mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{div}\,\mathbf{H} + \mathbf{div}\,\mathbf{M} = 0 \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} - \mathbf{M}] \end{aligned}$$

Para- und Diamagnetismus: lineare Näherung

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{\chi_m}{\chi_m + 1}\mathbf{B} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0\mu}\mathbf{B} \quad \text{mit} \mu = \chi_m + 1 \end{aligned}$$

Ferromagnetismus: Feld führt zum Umklappen weißscher Bezirke $\Rightarrow$ nicht lineare Beschreibung notwendig (Hysteresis)

4.3.1 Übergangsbedingung der magnetischen Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n1} &= \mathbf{B}_{n2} \quad \text{da } \mathbf{div}\,\mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} &= [\mathbf{j}_{makro}]_{OF} \quad \text{da } \mathbf{rot}\,\mathbf{H} = j_{makro} \end{aligned}$$

4.4 Kräfte und Drehmoment

Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q\mathbf{E} + I\mathbf{l}\times\mathbf{B}$$

Drehmoment

$$\mathbf{N} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}$$

mit Dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_0}{2}\int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV$$

Für dünne Stromfäden gilt $\mathbf{j}\, dV = I\, \mathbf{dr}$ und $\int \mathbf{r}\times\, \mathbf{dr} = \int\, \mathbf{df}$, sodass sich ergibt

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_0}{2} I \int \mathbf{df}$$

4.5 Energie des magnetostatischen Feldes

analog zur Elektrostatik

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dV \\ &= \frac{1}{2}\int_{V_j} dV\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}_{makro} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_{V_j}\int_{V_i} dV\,dV'\frac{\mathbf{j}_{makro}(\mathbf{r}')\mathbf{j}_{makro}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Spezialfall: Ströme in dünnen Leitern im Vakuum

$$W = \frac{1}{2}L_{ik}I_iI_k \quad \text{mit} L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{(F_i)}\int_{(F_k)}\frac{\mathbf{ds}_k\mathbf{ds}_i}{|\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_k|} = L_{ki}$$

andere Darstellung: magnetischer Fluss durch k-te Leiterschleife

$$\Phi_k = L_{ik}I_i = \int_{F_k}\mathbf{df}_k\mathbf{B}$$

5 Induktionsgesetz - langsam veränderliche Felder

Kopplung von **E** und **B** berücksichtigen: Ein zeitlich veränderliches **B**-Feld (Änderung des magnetischen Flusses Φ) führt zu Wirbeln des **E**-Feldes.

$$\begin{aligned} \int_{(F)}\mathbf{E}\,\mathbf{dr} &= -\frac{d}{dt}\int_F \mathbf{B}\,\mathbf{df} \\ \Leftrightarrow \qquad U_{ind} &= -\frac{d}{dt}\Phi(t) \end{aligned}$$

In differentieller Form ergibt sich eine Ergänzung zu den Maxwellgleichungen

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{d}{dt}\mathbf{B}$$

Definition von "langsam veränderlich" folgt aus der Annahme $|\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}| \ll |j|$ (keine Änderung an zweiter MWGL, keine Abstrahlung von Wellen)

$$|\omega\bar{\mathbf{D}}| \ll |\frac{\sigma}{\varepsilon}\bar{\mathbf{D}}| \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \ll 1$$

Mit Induktionsgesetz und der Annahme langsam veränderlicher Felder folgen die Kirchhoffschen Regeln der Elektrotechnik:

Knotensatz: Folgt aus der Maxwellgleichung $\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}$ durch Divergenzbildung mit $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = 0$ und der Integration über ein Volumen $0 = \int dV\,\mathbf{div}\,\mathbf{j} = \int \mathbf{df}\cdot\mathbf{j} = I_k$

$$\sum_k I_k = 0$$

Maschenregel: Folgt aus der Maxwellgleichung $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ in der integralen Form $\int \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = -\dot{\Phi} = U_k^{ind}$. Nimmt man zusätzlich noch die externen Spannungsquellen hinzu, so folgt die Maschenregel.

$$\int_{C'_k} \mathbf{E}\,\mathbf{dr} + \sum_i L_{ki} \frac{\partial I_i(t)}{\partial t} = U_k^{ext}(t)$$

5.1 Schwingkreis

XXX

6 Elektrodynamik

Maxwellsche Ergänzung $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ zur zweiten MWGL folgt aus der Kontinuitätsgleichung. Es ergibt sich das vollständige System der Maxwellschen Gleichungen zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{div}\,\mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{div}\,[\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}] &= \rho_{ext} \\ \mathbf{rot}\,\frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} - \mathbf{M}] &= \mathbf{j}_{makro} + \frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}] \end{aligned}$$

Dazu gehören ferner die Materialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] \end{aligned}$$

Außerdem werden oft folgende Abkürzungen genutzt. Dabei gilt hinten anstehende Näherung für Verschiebungs- und Orientierungspolarisation sowie para- oder diamagnetische Medien:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} && \approx \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} - \mathbf{M}] && \approx \frac{1}{\mu_0 \mu}\mathbf{B} \end{aligned}$$

6.1 Kontinuitätsgleichung

Folgt direkt aus der Maxwellschen Gleichung $\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$ durch Divergenzbildung. Mit $\mathbf{div}\,\mathbf{rot} = 0$ und $\mathbf{div}\,\mathbf{D} = \rho$ erhält man sofort

$$0 = \mathbf{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho$$

6.2 zeitliche Response

Medien reagieren nicht instantan auf Veränderung der Felder oder (äquivalent) Medien reagieren frequenzabhängig auf Feldänderungen.

Im folgenden soll zur Vereinfachung ein *isotropes lineares* Medium mit dielektrischer Response (R Responsefunktion oder Greensche Funktion) betrachtet werden, dessen magnetische Eigenschaften für schnelle zeitliche Veränderungen (optischer Bereich) vernachlässigt werden ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, $\mu = 1$).

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t')}_{\text{Gedaechtnis}} \qquad \text{mit } R(\mathbf{r}, t') = 0 \text{ für } t' < 0$$

Ein endliches Gedächnis führt zu Dispersion (Frequenzabhängigkeit), wie die Fouriertransformation zeigt. (Zusätzliche Bedingung: Felder müssen im Unendlichen verschwinden)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \underset{\text{inverse FT}}{\overset{\text{FT}}{\rightleftharpoons}} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t)$$

Analog erhält man im Frequenzraum die komplexe Suszeptibilitätsfunktion χ als Fouriertransformierte der Responsefunktion R. Nur im Frequenzraum ist der Zusammenhang multiplikativ, im Zeitraum ist eine Faltung nötig.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \quad & \chi(\mathbf{r}, \omega) \quad \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ & \chi(\mathbf{r}, \omega) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} dt' R(\mathbf{r}, t') \exp(i\omega t') \end{aligned}$$

Eine weitere Zusammenfassung ergibt die komplexe dielektrische Funktion $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \chi$. Der Realteil von $\hat{\varepsilon}$ kann als Dispersion, der Imaginärteil als Absorption intepretiert werden. Beide hängen über die Kramers-Kronig-Beziehung zusammen, so dass nur bei hoher Absorption (Resonanzstellen) eine starke Dispersion auftritt.

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \chi(\mathbf{r}, \omega)\right] \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

6.3 Maxwellsche Gleichungen im Fourierraum

Die zeitliche Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ wird im Frequenzraum zur Multiplikation mit $-i\omega$, somit vereinfachen sich die Maxwellschen Gleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t)]}_{\mathbf{E} \xrightarrow{t \to \infty} 0} - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} exp(i\omega t)}_{i\omega exp(i\omega t)} \right) \\ &= \quad -i\omega \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

6.4 Elektrodynamische Potentiale und Eichtransformationen

Die homogenen Maxwellgleichungen können durch folgende Potentiale automatisch erfüllt werden:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \\
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \mathbf{grad}\,\varphi(\mathbf{r},t)
\end{aligned}
$$

Im Vakuum ($\mu = \varepsilon = 1$) bleiben noch folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 \mathbf{div}\,\mathbf{E} &= \rho \\
\mathbf{rot}\,\mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der Potentiale ergeben sich die gekoppelten Potentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \mathbf{grad}\left[\mathbf{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r},t)\right] &= -\mu_0 \mathbf{j}_{makro}(\mathbf{r},t) \\
\Delta\varphi(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\rho_{ext}(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Über zwei mögliche Eichungen kann eine Entkopplung erreicht werden.

6.4.1 Lorentz-Eichung

Lösung muss alle drei Gleichungen erfüllen, Lorentzeichung explizit überprüfen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c^2}\varphi(\mathbf{r},t) &\doteq 0 \\
\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= -\mu_0 \mathbf{j}_{makro}(\mathbf{r},t) \\
\Box\varphi(\mathbf{r},t) &= -\frac{\rho_{ext}(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Lösung bereits aus E-Statik bekannt (Abstraktion auf allgemeines Problem):

$$
\begin{aligned}
\Box V(\mathbf{r},t) &= -q(\mathbf{r},t) \\
\Rightarrow \qquad V(\mathbf{r},t) &= \int\!\!\int dV'\, dt' G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') q(r',t')
\end{aligned}
$$

Nun bleibt die Greensche Funktion der zeitabhängigen Wellengleichung zu bestimmen

$$
\begin{aligned}
\Box G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') &= -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \\
\Rightarrow \qquad G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dV_k d\omega \frac{c^2}{\mathbf{k}^2 c^2 - \omega^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-\omega(t-t')}
\end{aligned}
$$

Die Integrale können über Betrachtungen der Funktionentheorie (analytische Fortsetzung für ω) aufgelöst werden, sodass sich eine retardierte Greensche Funktion (erfüllt Kausalitätsforderung: Ursache vor Wirkung) für natürliche Randbedingungen ergibt

$$G_{ret}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)$$

und man erhält die retardierten Potentiale, die Lorentzinvariant sind und damit der ART genügen (Signalausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit)

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dV' \frac{\rho_{ext}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dV' \frac{\mathbf{j}_{makro}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\end{aligned}$$

6.4.2 Coulomb- oder transversale Eichung

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\doteq 0 \\ \Delta\varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\rho_{ext}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} \\ \Box\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0\left[\mathbf{j}_{makro}(\mathbf{r}, t)\right]_{transversal}\end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende Lösung

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV' \frac{\rho_{ext}(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v dV' \frac{\left[\mathbf{j}_{makro}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right]_{transversal}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\end{aligned}$$

6.5 Energiebilanz - Poyntingscher Satz

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} &= 0 \qquad |\cdot\mathbf{H} \\ -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{rot}\,\mathbf{H} &= \mathbf{j} \qquad |\cdot\mathbf{E} \\ \mathbf{div}\ (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{H} \\ \Rightarrow \qquad \mathbf{E}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{H}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \mathbf{div}\,(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= -\mathbf{jE}\end{aligned}$$

Mit dem Poyntingvektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{H}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \mathbf{div}\,\mathbf{S} = -\mathbf{jE}$$

Im Vakuum oder Medium ohne Dispersion erhält man mit $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu_0\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}$ eine lokale Energiebilanz

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\mathbf{r},t) + \mathbf{div}\,\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

mit der Energiedichte $\frac{\partial}{\partial t}w = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mu\mathbf{H}^2\right) = \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}$

Für dispersive / absorbtive Medien ist diese einfache Betrachtung nicht mehr möglich. Man muss das zeitliche Mittel betrachten, vereinfacht für Monochromasie $\omega = \omega_0$

$$\mathbf{div}\,\langle\mathbf{S}\rangle = -\frac{1}{2}\omega_0\left[\Im(\bar{\mathbf{E}}^*\bar{\mathbf{P}}) + \Im(\bar{\mathbf{H}}^*\bar{\mathbf{M}})\right] - \langle\mathbf{jE}\rangle$$

Wird ein schmaler Frequenzbereich $\Delta\omega$ mit $\omega_0 \gg \Delta\omega$ betrachtet, so kann das Verfahren *Fouriertransformierte der langsamen Amplitude* eine Näherungslösung liefern. In erster Näherung ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{H}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\rangle = & \quad \varepsilon_0\omega_0\Im\varepsilon(\mathbf{r},\omega_0)\langle\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t)\rangle \\ & + \quad \mu_0\omega_0\Im\mu(\mathbf{r},\omega_0)\langle\mathbf{H}^2(\mathbf{r},t)\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\langle w(\mathbf{r},t)\rangle\end{aligned}$$

Als wichtiges Ergebnis hängt der lokale Energieverlust/-gewinn mit $\Im\varepsilon$ und $\Im\mu$ zusammen, sprich der Absorption im Medium.

7 Elektromagnetische Wellen

7.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Die Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\mathbf{D} &= \rho & \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \mathbf{div}\,\mathbf{B} &= 0 & \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

werden im Vakuum durch Fehlen von Ladungen, Strömen, Polarisations- und Magnetisierungseffekten deutlich vereinfacht, so dass sich mit $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ und $\mu_0\varepsilon_0 = c^{-2}$ eine Wellengleichung ergibt.

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} &= -\mathbf{rot}\,\dot{\mathbf{B}} \\ \mathbf{grad}\,\underbrace{\mathbf{div}\,\mathbf{E}}_{=0} - \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{E} &= -c^{-2}\ddot{\mathbf{E}} \\ \Delta\mathbf{E} &= \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}\end{aligned}$$

mit dem Ansatz für ebene Wellen $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ erhält man die Dispersionsrelation $k(\omega)$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$