Analysis I, II und III - Zusammenfassung

Vorlesung: Prof. Dr. Schmeißer
Zusammenfassung: Fabian Stutzki

11. August 2006

Die Zusammenfassung bezieht sich auf Analysis I (WS04/05), Analysis II (SS05) und Analysis III (WS05/06). Alle drei Vorlesungen wurden von Herrn Prof. Dr. Schmeißer gehalten. Fehler (auch bei kleineren Tipfehlern) und Anmerkungen bitte an fabian.stutzki@uni-jena.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle und komplexe Zahlen

Binominalkoeffizient: $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dreiecksungleichung: $|x+y| \leq |x| + |y|$ und $||x| - |y|| \leqslant |x+y|$

Häufungspunkte von $M \subset \mathbb{R}$: $\Leftrightarrow$ In jeder $U_\varepsilon(x_0)$ liegen unendlich viele Elemente aus M

Beschränktheit von $M \subset \mathbb{R}$: $\Leftrightarrow \exists c > 0 : M \subset [-c, c]$ oder $\Leftrightarrow \exists c \forall x \in M : |x| \leqslant c$, c wird Supremum und Infimum genannt, wenn $c \in M$ auch Maximum und Minimum, jede unendliche und beschränkte Menge besitzt einen Häufungspunkt

1.1 komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann in folgenden Formen dargestellt werden

Normaldarstellung: $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$
Realteil $\Re(z) = x$ und Imaginärteil $\Im(z) = y$
konjugiert Komplexe $\bar{z} = x - iy$

Trigonometrische Darstellung: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$
n-te Wurzel $w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\Psi_k + i\sin\Psi_k)$ mit $\Psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$

Exponentialdarstellung: $z = |z|e^{i\varphi}$, da $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

2 Konvergenz von Folgen

Grenzwert: $\lim_{k\to\infty} a_k = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon) : \forall k > k(\varepsilon) : |a_k - A| < \varepsilon$

Cauchy Folge: $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon) : \forall k, j > k(\varepsilon) : |z_k - z_j| < \varepsilon$

2.1 Nützliche Grenzwerte

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^k} &\overset{n\to\infty}{\to} 0 && k \in \mathbb{N} \\ \frac{n^k}{a^n} &\overset{n\to\infty}{\to} 0 && a > 1, k \in \mathbb{N} \\ \frac{a^n}{n!} &\overset{n\to\infty}{\to} 0 && a > 1 \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \qquad a > 0$$
$$\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$$
$$\sqrt[n]{n!} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$$

3 Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k$$

notwendige Bedingung für Konvergenz der Reihe: $a_k \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (a_k Nullfolge)

3.1 Wichtige Reihen

Eulersche Zahl: $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ mit $|z| < 1$

Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

Alternierende harm. Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ mit $a > 1$ ist konvergent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, dabei gilt $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

3.2 Konvergenzkriterien

Majorantenkriterium: Sei $0 \leqslant a_k \leqslant b_k \ \forall k > k_0$, dann folgt aus $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dass auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent, so auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Quotientenkriterium: Gilt $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant q < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

Wurzelkriterium: Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant q < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen: Ist a_k eine monotone Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

3.3 Folgen und Reihen von Funktionen

3.3.1 Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Konvergenzradius R wird mittels folgender Kriterien bestimmt:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k}} \\ R &= \lim_{k\to\infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} \end{aligned}$$

4 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

4.1 Grenzwert

$\lim_{z\to z_0} f(z) = c \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z) - c| < \varepsilon$

4.2 Stetigkeit

f heißt stetig in z_0

- $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \forall z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$
- $\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

4.3 Zwischenwertsatz

f stetig auf $[a, b]$ und $f(a) \leqslant w \leqslant f(b)$, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = w$

4.4 Gleichmäßige Stetigkeit

f heißt gleichmäßig stetig auf D $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \forall z, w \in D$ mit $|z - w| < \delta$ gilt $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$
Ist $f : K \to \mathbb{C}$ stetig auf K und $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, dann ist f gleichmäßig stetig auf K.

4.5 Monotonie

streng monoton wachsend: $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$

monoton wachsend: $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leqslant f(x_2)$

streng monoton fallend: $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$

monoton fallend: $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Monoton wachsend kann z.B. über $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$ oder $|a_{n+1}| - |a_n| \geqslant 0$ gezeigt werden.

4.6 Umkehrfunktion

Um von einer Funktion $f(x) = y$ zur Umkehrfunktion zu gelangen, werden x und y vertauscht und die Gleichung $x = f(y)$ nach y aufgelöst. Ist eine Funktion f in einem Intervall streng monoton, dann existiert für dieses Intervall die Umkehrfunktion f^{-1}.

4.7 Gleichmäßige Konvergenz

Eine Folge von Funktionen (f_k) konvergiert gleichmäßig gegen f auf $D \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists k(\varepsilon) > 0\ \forall k > k(\varepsilon)\ \forall z \in D$ gilt $|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$

5 trigonometrische Funktionen

Sinus: $\sin x = \Im e^{ix} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ü

Kosinus: $\cos x = \Re e^{ix} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

Tanges: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0 (0¡)	$\frac{\pi}{6}$ (30¡)	$\frac{\pi}{4}$ (45¡)	$\frac{\pi}{3}$ (60¡)	$\frac{\pi}{2}$ (90¡)
$\sin x$	0	-1	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos x$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y
\end{aligned}
$$

Sinus Hyperbolicus: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Kosinus Hyperbolicus: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tangens Hyperbolicus: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ und $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

$$\begin{aligned} 1 &= \cosh^2 x - \sinh^2 x \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \end{aligned}$$

5.1 Ableitung

Funktion	Ableitung
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\mathrm{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Meist können die Ableitungen mit folgendem Trick bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) = x \;\Rightarrow\; \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' &= 1 \\ \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \cdot (\arcsin x)' &= 1 \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

6 Exponentialfunktion

$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{x_n})^{x_n}$ und $\frac{1}{e} = \frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

- $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
- für $|z| \leq \frac{1}{2}$ gilt $|e^z - (1+z)| \leq |z|^2$
- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

6.1 Logarithmusfunktion

Der natürliche Logarithmus $\ln x$ ist die Umkehrfunktion von e^x, so dass definiert wird $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

- $\ln x + \ln y = \ln(xy)$
- $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$
- $\alpha \ln x = \ln x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$

7 Differentiation

7.1 Differentiation und Ableitung

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt diffbar in $x_0 \in (a,b) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

7.1.1 Differentiationsregeln

Addition: $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Kettenregel: $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$

7.1.2 Sätze über diffbare Funktionen

1.Mittelwertsatz: $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, diffbar auf $(a,b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ (Es existiert eine Ableitung von f mit der gleichen Steigung wie die Gerade zwischen den Endpunkten)

2.Mittelwertsatz: $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, diffbar auf $(a,b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

l'Hospital'sche Regel: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

7.2 Höhere Ableitungen

7.2.1 Satz von Taylor

Mit einer Taylor-Reihe kann eine Funktion $f(x)$ um den Punkt x_0 als Potenzreihe angenähert werden. Es ergibt sich das Taylor-Polynom N-ter Ordnung T_N sowie ein Rest R_N, der die Abweichung der Funktionswerte von der Taylor-Reihe beschreibt ($\xi \in (x_0, x)$).

$$
\begin{aligned}
f(x) &= T_N + R_N \\
T_N(x) &= T(f, x, x_0, N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\
R_N(x) &= \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt
\end{aligned}
$$

7.2.2 Konvexität

konvex (Linkskrümmung) $\Leftarrow$ $f''(x) > 0$ auf (a, b)

konkav (Rechtskrümmung) $\Leftarrow$ $f''(x) < 0$ auf (a, b)

Wendepunkt in x_0 (VZW) $:\Leftrightarrow$ $sgn(f''(x_1)) \cdot sgn(f''(x_2) = -1$ mit $x_1 < x_0 < x_2$

7.2.3 Lokale Extrema

$f'(x_0) = 0$ und

lokales Minimum $f''(x_0) > 0$

lokales Maximum $f''(x_0) < 0$

8 Integration

8.1 Stammfunktion

$F : (a, b) \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f auf $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b)$ gilt $F'(x) = f(x)$

8.1.1 Wichtige Stammfunktionen

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x|$
- $\int e^x \, dx = e^x$
- $\int \alpha^x \, dx = \int e^{x \ln \alpha} \, dx = \frac{e^{x \ln \alpha}}{\ln \alpha} = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha}$ mit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$
- $\int \cos x \, dx = \sin x$ und $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x$ auf $(0, \pi)$ und $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ auf $(-1, 1)$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \operatorname{arsinh}(x)$

8.1.2 Integrationsregeln

Partielle Integration: $\int u'v = uv - \int uv'$

Integration durch Substitution: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt$

8.2 Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung

Zu einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert eine stetige, diffbare Funktion $\Phi(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\Phi'(x) = f(x)$. Φ ist dann Stammfunktion von f auf $[a, b]$.

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a)$$

8.3 Integration rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen $P(x)$, $Q(x)$ und $GradP < GradQ$ lässt sich wie folgt darstellen, die Konstanten A_{jk},C_{jk},α_j und β_j lassen sich eindeutig bestimmen (Partialbruchzerlegung).

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk}}{(x-x_j)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{l_j} \left[\frac{C_{jk}}{(x-z_j)^k} + \frac{\overline{C_{jk}}}{(x-\overline{z_j})^k} \right] \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk}}{(x-x_j)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{l_j} \frac{a_{jk}x+b_{jk}}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^k} \end{aligned}$$

8.3.1 Integration der auftretenden Partialbrüche

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-x_0} &= \ln|x-x_0| + c \\
\int \frac{dx}{(x-x_0)^k} &= \frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{1}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}} + c \\
\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\, dx &= \frac{1}{\beta^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{\beta} \arctan(\frac{x-\alpha}{\beta}) + c \\
\int \frac{ax}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\, dx &= a\left(\frac{1}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \alpha \int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\, dx\right) \\
&= \frac{a}{2}\ln[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{a\alpha}{\beta}\arctan(\frac{x-\alpha}{\beta})
\end{aligned}$$

8.4 Substitutionsregeln

1. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) \Rightarrow$ Substitiution mit $t = \sqrt[n]{ax+b} \Leftrightarrow x = \frac{t^n-b}{a}$
2. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) \Rightarrow$ Substitution mit $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
3. $\int R(e^x) \Rightarrow$ Subsitution mit $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$
4. $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) \Rightarrow$ Substitution mit
   - $\sqrt{x^2+1} = cosh(t)$
   - $t = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$
5. $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) \Rightarrow$
   - Substitution mit $x = \pm\cosh(t)$
   - Zurückführen auf (2)
6. $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) \Rightarrow$
   - Zurückführen auf (2)
   - Substitution mit $x = \sin(t)$ auf $t \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

8.5 Integration trigonometrischer Funktionen

Integration von $R(\cos(x), \sin(x)) \Rightarrow$ Substitution mit $t = \tan(\frac{x}{2})$, denn $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ und $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ sowie $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

8.5.1 Orthogonalität des trigonometrischen Systems

8.6 Uneigentliche Integrale

8.7 Gammafunktion

Gammafunktion wird definiert als $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

- $\forall x$ gilt $\Gamma(x+1) = x * \Gamma(x)$
- $\Gamma(1) = 1 \quad , \Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$
- beliebig oft diffbar und konvex auf $(0, \infty)$

9 Differentiation im $\mathbb{R}^n$

9.1 Metrische und normierte Räume

Metrik (Abstand): Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty) \quad \forall x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} d(x,x) &= 0 \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Norm: Abbildung $\|\cdot\| \to [0, \infty) \quad \forall x, y \in X.\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \|x\| &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda|\|x\| \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

offene ε-Kugel (ε-Umgebung): $U_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$

$x \in M$ **innerer Punkt:** $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset M$
M° Menge aller inneren Punkte

$M \subset X$ **offen:** $M = \emptyset$ oder jeder Punkt ist ein innerer Punkt

$A \subset X$ **abgeschlossen:** $\Leftrightarrow$

- $X \backslash A$ offen
- Alle Häufungspunkte von A sind Element von A
- Der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A liegt in A

Durchmesser: $diam M = \sup\{d(x,y) : y, x \in M\}$

$M \subset X$ **beschränkt:** $diam M < \infty$

$y \in M \subset X$ **Randpunkt:** $\forall \varepsilon > 0 : M \cap U_\varepsilon(y) \neq \emptyset \wedge (X \backslash M) \cap U_\varepsilon(y) \neq \emptyset$
∂M Menge aller Randpunkte

$y \in M \subset X$ **Häufungspunkt:** Jede $U_\varepsilon(y)$ enthält mindestens einen von y verschiedenen Punkt aus M

$x \in M$ **isolierter Punkt:** $\exists \varepsilon > 0 : M \cap U_\varepsilon(x) = \{x\}$

9.2 Konvergenz und Vollständigkeit

$(x_k)_k$ **konvergent:**

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \quad \exists x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall k > k(\varepsilon) : \; d(x_k, x) < \varepsilon \\ &:\Leftrightarrow \quad \exists x \in X \; \wedge \; \lim_{k \to \infty} d(x_k, x) = 0 \end{aligned}$$

$(x_k)_k$ **Cauchy-Folge:**

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k, l > k(\varepsilon) : d(x_k, x_l) < \varepsilon$$

$(x_k)_k$ **beschränkt:**

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \quad \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \quad \text{ist beschränkt} \\ &:\Leftrightarrow \quad \sup\{d(x_k, x_l) : k, l \in \mathbb{N}\} < \infty \quad \text{(Durchmesser)} \end{aligned}$$

vollständiger metrischer Raum: Jede Cauchy-Folge konvergiert

Banachraum: vollständig, normierter Vektorraum

9.3 Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Kompakte Mengen: K ist abgeschlossen und jede Folge aus K enthält eine konvergente Teilfolge

$y_0 \in Y$ **Grenzwert** von f für $x \to x_0 :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D, x \neq x_0$ gilt $f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$ oder Abstand $d_y(f(x), y_0) < \varepsilon$

f **stetig in** $x_0 \in D$**:** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$ gilt $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)$ oder $d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

f **gleichmäßig stetig auf** $D \subset X$**:** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x, x' \in D$ mit $d_x(x, x') < \delta$ gilt $d_y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

9.4 Partielle Ableitungen

Richtungsableitung: Ableitung in Richtung eines beliebigen Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Falls f in $\mathbf{x}$ total diffbar, gilt

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{v}$$

Partielle Ableitung: Spezialfall der Richtungsableitung für $v = e_j = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$

Gradient von f**:** $\nabla f(x) = \mathbf{grad}\, f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$

f **n-mal stetig diffbar in** x^0 $:\Leftrightarrow$ Alle partiellen Ableitungen von f existieren und sind in $U_\delta(x^0)$ stetig ($f \in C^n(\Omega) \Leftrightarrow f$ n-mal stetig diffbar auf offener Menge Ω)

Tangentialebene im $\mathbb{R}^2$**:** $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, Normalenvektor $(-f_x, -f_y, 1)$

Satz von Schwarz: $\exists D_j f, D_k f, D_j D_k f$ in $U(x^0)$ und $D_j D_k f$ stetig in $U(x^0)$ $\Rightarrow \exists D_k D_j f(x^0)$ und $D_k D_j = D_j D_k$

Satz von Taylor: im $\mathbb{R}^n$ bis zur zweiten Ordnung mit

- Hesse-Matrix $H = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f & \ldots & D_1 D_n f \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n D_1 f & \ldots & D_n D_n f \end{pmatrix} (x)$
- $Df(x) = [D_1 f(x), D_2 f(x), \ldots, D_n f(x)] = [\nabla f]^T$
- $x, x^0 \in \mathbb{R}^n$
- $\lim_{x \to x^0} \frac{R(x)}{||x - x^0||} = 0$

$$f(x) = f(x^0) + Df(x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2}[x - x^0]^T H f(x^0)(x - x^0) + R(x)$$

9.5 Lokale Extremwerte

Definition: f hat ein isoliertes lokales Maximum in $x^0 \in \Omega \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \, \forall x \in U_\delta(x^0), x \neq x^0 : f(x) < f(x^0)$ (Minimum für $f(x) > f(x^0)$)

Notwendige Bedingung: $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, ||v|| = 1$

Hinreichende Bedingung: Für Maximum muss nach Satz von Taylor $\frac{1}{2}[x - x^0]^T Hf(x^0)(x - x^0) < 0$ oder äquivalent $Hf(x^0)$ negativ-definit sein (> 0 oder positiv-definit für Minimum)

Matrix A positiv-definit:

$$
\begin{aligned}
&:\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } A \text{ positiv} \\
&:\Leftrightarrow \quad \forall k = 1, \ldots, n : \Delta_k := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots \\ \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0
\end{aligned}
$$

9.6 Diffbare Abbildungen

Im folgenden $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

f **diffbar** im Punkt $x^0 \in \Omega$:

- $\Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots, n$ ist f_j diffbar in x^0, man schreibt

$$Df(x^0) = f'(x^0) := \begin{pmatrix} Df_1 \\ \ldots \\ Df_m \end{pmatrix} (x^0) = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \ldots & D_n f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_m & \ldots & D_n f_m \end{pmatrix} (x^0)$$

  und nennt dies Jacobi-Matrix von f („Ableitung“ von f)

- $\Leftrightarrow \exists$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots \\ \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit

$$f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + R(x) \quad \text{mit } \lim_{x \to x^0} \frac{R(x)}{||x - x^0||} = 0$$

  Dann ist $A = Df(x^0)$

Linearisierung von f: $f(x) = f(x^0) + Df(x^0)(x - x^0)$

Jacobi-Determinante:

$$\frac{\partial(f_1, \ldots f_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)}(x^0) = \det Df(x^0)$$

Beispiel: Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
x &= g_1(r,\varphi) = r\cos\varphi \\
y &= g_2(r,\varphi) = r\sin\varphi \\
Dg(r,\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\
\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} &= r
\end{aligned}$$

9.7 Inverse Abbildungen

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, $x^0 \in \Omega$ mit $f(x^0) = y^0$ und $\frac{\partial(f_1,\dots f_n)}{\partial(x_1,\dots x_n)}(x^0) = \det Df(x^0) \neq 0$, dann existieren offene Mengen $x^0 \in U \subset \Omega$ und $x^0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f : U \to V$ bijektive C^1-Abb. und Jacobi-Matrix $(Df^{-1})(y^0) = [Df(x^0)]^{-1}$.

Diffeomorphismus $g : G \to \Omega$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad g\ C^1\text{-Abbildung und Bijektion, } g^{-1}\ C^1\text{-Abbildung} \\
&\Leftrightarrow \quad g \text{ Bijektion von } G \text{ auf } \Omega \text{ und } \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} \neq 0 \text{ auf } G
\end{aligned}$$

Koordinaten-Vektor $u \in G$ von $x \in \Omega$ $:\Leftrightarrow$ $g(u) = x$ (u krummlinige Koordinate)

Auflösungssatz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung, $(x^0, y^0) \in \Omega$ ($x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $y^0 \in \mathbb{R}^m$) mit $f(x^0, y^0) = 0$ und gelte $\frac{\partial(F)}{\partial(y)}(x^0, y^0) \neq 0$, dann existieren Umgebungen $U(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ und $V(y^0) \subset \mathbb{R}^m$ mit $U \times V \subset \Omega$, so dass $\forall x \in U\, \exists!\, y = f(x) \in V$ mit $F(x, f(x) = 0$. $f : U \to V$ ist C^1-Abb und die partiellen Ableitungen von f sind Lösungen der LGS:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(x,y) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(x,y) \end{bmatrix}$$

In Kurzform: $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$

9.8 Extrema mit Nebenbedingungen

Lagrange-Funktion: $F : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen sowie Nebenbedingung $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Untersuche $L(x,y,\lambda) := F(x,y) + \lambda g(x,y)$ auf lokale Extremwerte und finde alle stationären Punkte (x^0, y^0, λ^0) mit $grad\, L(x^0, y^0 \lambda^0) = 0$

10 Integration im $\mathbb{R}^n$

Satz von Fubini: Sei $Q = A \times B$ mit Q n-dim, A k-dim und B l-dim Rechtecken, $f(x,y) : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf Q und für jedes feste $x \in A$ existiere $\int_B f(x,y)\,dy$, dann ist $\int_A \int_B f(x,y)\,dy\,dx = \int_Q f(x,y)\,d(x,y)$

Normalbereich: B heißt Normalbereich im $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \quad \exists [a,b] \subset \mathbb{R} \wedge \exists \psi, \varphi$ stetig, so dass $B = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant q\psi(x)\}$

Jordansche Nullmenge M: $:\Leftrightarrow \quad \exists$ endlich viele abgeschlossene Rechtecke Q_j, so dass $M \subset \bigcup_j Q_j$ und $\sum_j \mu(Q_j) < \varepsilon$

jordan-messbar: Beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt jordan-messbar $\Leftrightarrow$ Rand $\partial\Omega$ Jordansche Nullmenge

charakteristische Funktion: $\Omega \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ jordan-messbar, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (fast überall) stetig $\Rightarrow \exists \int_\Omega f\,dx = \int_Q f\ \chi_\Omega\,dx$

10.1 Integration durch Transformation

Seien A,B kompakt und jordan-messbar. Sei $g : A \to B$ stetig diffbar und surjektiv ($g(A) = B$), ferner $N \subset A$ jordansche Nullmenge mit g injektiv und Jacobi-Matrix ungleich Null auf $A \backslash N$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_B f(x)\,dx = \int_A f(g(u)) \left| \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right| du$$

10.2 Kurvenintegrale

Parameterdarstellung: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\Gamma = \{x = \varphi(t) : t \in [a,b]\}$

Bogenlänge von Γ: $L(\Gamma) = \int_a^b \|\dot\varphi(t)\|\ dt = \int_a^b \sqrt{\dot\varphi_1^2(t) + \ldots + \dot\varphi_n^2(t)}\,dt$

Kurvenintegral 1.Art: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig mit Linienelement $ds = \|\dot\varphi(t)\|\ dt$

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\,\|\dot\varphi(t)\|\ dt$$

Kurvenintegral 2.Art: $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld:

$$\int_\Gamma \mathbf{v}\,\mathbf{dx} = \int_a^b \mathbf{v}(\varphi(t)) \cdot \dot\varphi(t)\,dt$$

10.3 Oberflächenintegral im $\mathbb{R}^3$

Parameterdarstellung: $g : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbar, $B \subset G$ kompakt und jordan-messbar und $S = g(B) = \{g(u,v) : (u,v) \in B\}$

Flächeninhalt von S: mit $g_u = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_3}{\partial u}\right)$, $E = g_u \cdot g_u$, $G = g_v \cdot g_v$ und $F = g_u \cdot g_v$

$$\omega(S) = \int_B \|g_u \times g_v\| \; d(u,v) = \int_B \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2}\, d(u,v) = \int_B \sqrt{E \cdot G - F}\, d(u,v)$$

Oberflächenintegral 1.Art: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig mit Oberflächenelement $dS = \|g_u \times g_v\| \, d(u,v)$

$$\int_S f\, dS = \int_B f(g(u,v))\, \|g_u \times g_v\| \, d(u,v)$$

Oberflächenintegral 2.Art: $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig:

$$\int_S \mathbf{v}\, \mathbf{ds} = \int_B \mathbf{v}(g(u,v)) \cdot [g_u \times g_v](u,v)\, d(u,v)$$

11 Vektoranalysis

$\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, skalares C^1-Feld $u : \Omega \to \mathbb{R}$, C^1-Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_j \in C^1(\Omega)\ \forall j$

Gradient: $\mathbf{grad}\, u = \nabla u = \partial_1 u \mathbf{e}_1 + \ldots + \partial_n u \mathbf{e}_n = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$

Divergenz: $\mathbf{div}\, \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \ldots + \partial_n v_n$

Rotation: $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2\ ,\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3\ ,\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)$

Laplace-Operator: $\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$
$\Delta \mathbf{v} = \Delta v_1 \mathbf{e}_1 + \Delta v_2 \mathbf{e}_2 + \Delta v_3 \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\, u) &= 0 \\
\mathbf{div}\,(\mathbf{rot}\, \mathbf{v}) &= 0 \\
\mathbf{div}\,(\mathbf{grad}\, u) &= \Delta u \\
\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\, \mathbf{v}) &= \mathbf{grad}\,(\mathbf{div}\, \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \\
\mathbf{grad}\,(f \cdot g) &= g \cdot \mathbf{grad}\, f + f \cdot (\mathbf{grad}\, g) \\
\mathbf{div}\,(f \cdot \mathbf{H}) &= f \cdot \mathbf{div}\, \mathbf{H} + \mathbf{H}(\mathbf{grad}\, f) \\
\mathbf{div}\,(\mathbf{H} \times \mathbf{K}) &= (\mathbf{rot}\, \mathbf{H}) \cdot \mathbf{K} - \mathbf{H} \cdot (\mathbf{rot}\, \mathbf{K}) \\
\mathbf{rot}\,(f \cdot \mathbf{H}) &= f \cdot (\mathbf{rot}\, \mathbf{H}) + (\mathbf{grad}\, f) \times \mathbf{H}
\end{aligned}$$

Potential: $\mathbf{v}$ konservativ $\Rightarrow\ \exists u \in C^1(\Omega):\ \mathbf{v} = \mathbf{grad}\, u$ mit Potential u und $\partial_j v_k = \partial_k v_j\ \forall j,k$ (falls Ω einfach zusammenhängend, dann auch $\Leftrightarrow$)
Bestimmung eines Potentials am Beispiel

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(x,y) &= (2xy + y^2,\ x^2 + 2xy) \\
u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} \mathbf{v}\,\mathbf{dx} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \mathbf{v}\,\mathbf{dx} \\
&= \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx + \int_0^y \begin{pmatrix} 2xy + y^2 \\ x^2 + 2xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x^2 y + x y^2
\end{aligned}$$

oder über die Bedingung: $\frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= v_1 = 2xy + y^2 \\
&\Leftrightarrow\ u(x,y) = x^2 y + y^2 x + c(y) \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= v_2 = x^2 + 2xy \overset{!}{=} x^2 + 2xy + c'(y) \\
\Rightarrow c'(y) = 0 &\Leftrightarrow\ c(y) = const \\
u(x,y) &= x^2 y + x y^2 + c
\end{aligned}$$

Vektorpotential: $\mathbf{w}$ Vektorpotential von $\mathbf{v}\ :\Leftrightarrow\ \mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{w}$

11.1 Integralsätze

Greensche Formel im $\mathbb{R}^2$: $B \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Ω offen, B kompakt

$$\int_B (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\, dx = \int_{\partial B} \mathbf{v}\,\mathbf{dx}$$

Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$: $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω offen, $S = g(B)$ kompakte Fläche, ∂S Rand, $g \in C^2(G)$, $\mathbf{v} = \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Vektorfeld

$$\int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\,\mathbf{dS} = \int_{\partial S} \mathbf{v}\,\mathbf{dx}$$

Satz von Gauß: B Normalbereich, ∂B Rand, $\mathbf{n}$ äußerer Normalenvektor an ∂B, $B \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω offen, $\mathbf{v}$ C^1-Vektorfeld auf Ω

$$\int_B \mathbf{div}\,\mathbf{v}\, dx = \int_{\partial B} \mathbf{v}\ \mathbf{n}\, ds$$

11.2 Flächenintegrale im $\mathbb{R}^n$

m-Flächen im $\mathbb{R}^n$: $S = g(B)$, $B \subset G \subset \mathbb{R}^m$, G offen, B Normalbereich, $g : G \to \mathbb{R}^n$ injektive C^1-Abbildung mit $\text{Rang}(D_g) = m$ und $x_i = g_i(u_1, \ldots, u_m)$, $dS = \sqrt{\det(g_{ik})}d(u_1, \ldots, u_m)$

$$\int_S F dS = \int_B F(g(u_1, \ldots, u_m))\sqrt{\det(g_{ik})}d(u_1, \ldots, u_m)$$

Oberfläche der Einheitskugel: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos\varphi \sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \\
x_2 &= r \sin\varphi \sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \\
x_3 &= r \cos\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \\
x_{n-1} &= r \cos\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2} \\
x_n &= r \cos\vartheta_{n-2} \\
\frac{\partial(x_1, \ldots x_n)}{\partial(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{n-2})} &= r^{n-1} \sin\vartheta_1 (\sin\vartheta_2)^2 \ldots (\sin\vartheta_{n-2})^2
\end{aligned}$$

Oberflächenelement $d\omega_n = \sin\vartheta_1(\sin\vartheta_2)^2 \ldots d(\varphi, \vartheta_1, \ldots)$

$$|\omega_n| = \int_{\omega_n} 1 \cdot d\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} |\omega_n| = 0$ sowie ein Maximum für $n = 7$

11.3 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinatensystemen im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
x &= g_1(u, v, w) \\
y &= g_2(u, v, w) \\
z &= g_3(u, v, w)
\end{aligned}$$

Setze $\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\partial_u g$ mit $\partial_u g = \begin{pmatrix} \partial_u g_1 \\ \partial_v g_2 \\ \partial_w g_3 \end{pmatrix}$ und $h_u = ||\partial_u g||$ und $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} > 0$ auf G, analog $\mathbf{e}_v$ und $\mathbf{e}_w$

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\, f &= \frac{1}{h_u}\partial_u f \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\partial_v f \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\partial_w f \mathbf{e}_w \\
\mathbf{div}\, \mathbf{F} &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\partial_u(h_v h_w F_u) + \partial_v(h_u h_w F_v) + \partial_w(h_u h_v F_w)\right] \\
\Delta f &= \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\, f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\partial_u\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\partial_u f\right) \ldots\right]
\end{aligned}$$

Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi \\
\mathbf{div}\,\mathbf{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten: $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi \\
\mathbf{div}\,\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial (A_\vartheta \sin\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\Delta u &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

12 Einfache Differentialgleichungen

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

Lösung über

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{g(u)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

12.1 Lineare DGL 1.Ordnung

$$y'(x) = f(x)y(x) + s(x)$$

Allgemeine Lösung

$$y(x) = ce^{F(x)} + y_s(x)$$

12.2 Lineare DGL 2.Ordnung mit Koeff=const

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

Homogene Lösung y_h bestimmen

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

2 Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Doppelte Nullstelle

$$\lambda = -\frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

Komplexe Nullstelle

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \alpha \pm i\beta$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Spezielle Lösung y_s finden

$$\begin{array}{rcl} c_1' y_1 + c_2' y_2 & = & 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' & = & g(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \int c_1' = \int \frac{1}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix}$$

Die Allgemeine Lsung ergibt sich zu

$$y(x) = Ay_1 + By_2 + y_s \quad A, B \in (R)$$

13 Gewöhnliche Differentialgleichungen

13.1 Systeme von DGL

DGL-System $\dot{\mathbf{z}} = A \cdot \mathbf{z} + b(t)$ sowie AWP $z(0) = z^0$ gegeben, $z(t)$ gesucht. Bestimme Fundamentalsystem:

- Eigenwerte λ: $det(A - \lambda I) = 0$
- Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$

- λ_i mit Vielfachheit k: k linear unabhängige Eigenvektoren u_i bestimmen über $(A - \lambda_i I)\mathbf{u}_i = 0$, Lösung $\vec{\varphi}_i = e^{\lambda_i z}\mathbf{u}_i$
- $\lambda_i \in \mathbb{C}$ dann auch $\overline{\lambda_i}$ Eigenvektor, es muss jedoch nur einer betrachtet werden, da sich somit bereits zwei reelle Lösungen $\vec{\varphi}_{i1} = \Re\left(e^{\lambda_i z}\mathbf{v}_i\right)$ und $\vec{\varphi}_{i2} = \Im\left(e^{\lambda_i z}\mathbf{v}_i\right)$ ergeben
- λ_i k-fache Nullstelle, aber nur $k-l$ Eigenvektoren, weitere l linear unabhängige Wurzelvektoren mit $(A - \lambda_i I)^k\mathbf{u}_j = 0$ bestimmen, Lösung ergibt $\vec{\varphi}_i = e^{\lambda_i z}\sum_{a=0}^{k-1}\frac{z^a}{a!}(A - \lambda_i I)^a\mathbf{u}_j$

- Allgemeine homogene Lösung ergibt sich über Addition $\vec{\varphi}_H = \sum c_i\vec{\varphi}_i$ mit $c_i \in \mathbb{R}$
- Inhomogene Lösung über Variation der Konstanten $\Phi\mathbf{c}' = \mathbf{b}$ mit $n \times n$-Matrix $\Phi = (\vec{\varphi}_1 \ldots \vec{\varphi}_n)$

13.2 Lineare DGL n-ter Ordnung

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{z} + a_0 z = b(t)$$

Zurückführen auf Systeme 1.Ordnung. $z_1 = z, z_2 = \dot{z}, \ldots, z_n = z^{(n-1)}$, somit ergibt sich die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden, weitere Rechnung wie bekannt:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

13.2.1 spezielle Ansätze für Inhomogenität

Falls Inhomogenität der DGL folgende Form besitzt und $\mu \pm i\beta$ Nullstelle des char. Polynoms mit Vielfachheit m (keine NS $\Rightarrow m = 0$):

$$s(x) = e^{\mu x}(b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p)(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

kann folgender Ansatz gewählt und in die DGL eingesetzt werden, die Koeffizienten ergeben sich über einen Koeff.-Vergleich:

$$y_p(x) = x^m e^{\mu x}\left[(c_0 + \ldots + c_p x^p)\cos\beta x + (d_0 + \ldots + d_p x^p)\sin\beta x\right]$$

14 Partielle Differentialgleichungen

- Lösungen für die Gleichung $-\Delta u(x) = f(x)$ gesucht

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt zulässiges Gebiet $:\Leftrightarrow$ Satz von Gauß anwendbar

- $C^m(\Omega) := \{u : \exists D^\alpha u, |\alpha| \leqslant m, \text{ stetig auf } \Omega\}$

- $C^m(\bar{\Omega}) := \{u \in C^m(\Omega) : \forall \alpha$ mit $|\alpha| \leqslant m$ existieren stetige Fortsetzungen auf $\partial\Omega\}$

- $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch auf $\Omega :\Leftrightarrow \Delta u(x) = 0$ auf Ω

Fundamentallösung der Laplace-Lösung: Für $x \neq y$ setze

$$\Gamma(x,y) := \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x-y| & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & n > 2 \end{cases}$$

Greensche Funktion: $G(x,y) = \Gamma(x,y) + \Phi(x,y)$

$$:\Leftrightarrow G(x,y) = 0 \quad \forall y \in \Omega, x \in \partial\Omega$$

14.1 Greensche Darstellungsformel

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zulässiges Gebiet, Ω offen, $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $\mathbf{n}(x)$ äußerer Normalenvektor an $x \in \partial\Omega$. Für alle $y \in \Omega$ gilt:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}(x)}(x,y) - \Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) \right] dS(x) + \int_\Omega \Gamma(x,y) \Delta u(x)\, dx$$

Für u harmonisch und Greensche Funktion $G(x,y)$ folgt

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}(x)}(x,y) dS(x)$$

14.2 Poisson-Integral und Greensche Funktion für Einheitskugel

mit $\bar{y} = \frac{y}{|y|^2}$ für $y \neq 0$ gilt:

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma(|y||x-\bar{y}|) & y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(1) & y = 0 \end{cases}$$

Lösung des Dirichlet-Problems: mit $\Delta u = 0$ auf K_R und $u = \varphi$ auf ∂K_R ergibt sich zu:

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{R|\omega_n|} \int_{\partial K_R} \frac{\varphi(x)}{|x-y|^n} \, dS(x)$$

14.3 Mittelwerteigenschaft

$u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch auf $\Omega :\Leftrightarrow \Delta u(x) \geqslant 0$ auf Ω
$u \in C^2(\Omega)$ superharmonisch auf $\Omega :\Leftrightarrow \Delta u(x) \leqslant 0$ auf $\Omega \Leftrightarrow -u$ subharmonisch

sphärische Mittelwerteigenschaft: Für u subharmonisch ($\Delta u \geqslant 0$) gilt auf jeder Kugel $K_R(y)$ mit $\bar{K_R}(y) < \Omega$:

$$u(y) \leqslant \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R(y)} u(x) \, dx$$

(Analog auch für u superharmonisch oder harmonisch)

Kugel-Mittelwerteigenschaft: Für u subharmonisch ($\Delta u \geqslant 0$) gilt auf jeder Kugel $K_R(y)$ mit $\bar{K_R}(y) < \Omega$:

$$u(y) \leqslant \frac{1}{|K_R|} \int_{K_R(y)} u(x) \, dx$$

(Analog auch für u superharmonisch oder harmonisch)

14.4 Maximum- und Minimumprinzip

starkes Max-Min-Prinzip: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \geqslant 0$ subharmonisch auf Ω und $\exists\, y^0 \in \Omega$ mit $u(y^0) = \sup_{y \in \Omega} u(y)$, dann ist $u = const$
Analoge Aussage für u superharmonisch und $\exists y^0 \in \Omega$ mit $u(y^0) = \inf_{y \in \Omega} u(y)$, dann ist $u = const$.

schwaches Max-Min-Prinzip: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dann gilt:

$$\begin{aligned} u(x) &\leqslant \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega \text{ falls } \Delta u(x) \geqslant 0 \text{ auf } \Omega \\ u(x) &\geqslant \min_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega \text{ falls } \Delta u(x) \leqslant 0 \text{ auf } \Omega \end{aligned}$$

14.5 Newton-Potential

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes zulässiges Gebiet, mit gegebenem $f \in C(\bar{\Omega})$, gesucht ist das Newton-Potential u mit $-\Delta u = f$

Lösung: mit folgenden Eigenschaften

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(|x-y|)\, \Delta f(y)\, dy$$

- $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$
- $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma(|x-y|)\, f(y)\, dy$
- für $n \geqslant 3$: $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$

Dirichlet-Problem für Poissongleichung: $-\Delta u = f$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u|_{\partial\Omega} = g$ auf $\partial\Omega$, dann lässt sich die Lösung zusammensetzen

$$\begin{aligned} u(x) &= v(x) + w(x) \\ w(x) &= -\int_\Omega \Gamma(|x-y|)\, f(y)\, dy \\ v(x) &= \frac{R^2 - |x|^2}{|\omega_n| R} \int_{|x-y|=R} \frac{g(y) - w(y)}{|x-y|^n}\, dS(y) \end{aligned}$$

14.6 Cauchy-Probleme / Anfangswertprobleme

14.6.1 Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung)

gegeben sind $f(\mathbf{x}, t)$ und $u_0(\mathbf{x})$, gesucht $u(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) \quad \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

(Spezialfall einer parabolischen Gleichung)

Fundamentallösung: $\Phi(\mathbf{x},t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t})$

Lösung der homogenen Gleichung: ergibt sich zu

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)\, u_0(\mathbf{y})\, \mathbf{dy}$$

Cauchy-Problem für inhomogene Wärmeleitungsgleichung: mit $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s)\, f(\mathbf{y},s)\, \mathbf{dy}\, ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}\right) f(\mathbf{y},s)\, \mathbf{dy}\, ds \end{aligned}$$

Dann gilt:

- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
- $u_t - \Delta u = f(\mathbf{x},t)$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
- $\lim_{(\mathbf{x},t)\to(x^0,0)} u(\mathbf{x},t) = 0$

Lösungsansatz $u = v + w$ mit

$$\begin{array}{rl} v_t - \Delta v = 0 \qquad & w_t - \Delta w = f \\ v(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \qquad & w(\mathbf{x},0) = 0 \end{array}$$

14.6.2 1-dim Wellengleichung

gegeben sind $f(x,t)$, $u_0(x)$ und $u_1(x)$ sowie $c > 0$, gesucht $u(x,t)$ mit

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x,t) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{Anfangsbedingungen} \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \end{aligned}$$

(Spezialfall einer hyperbolischen Gleichung)

Allgemeine Lösung der homogenen 1-dim Wellengleichung: lässt sich aus zwei beliebigen Funktionen φ, $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ darstellen:

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

Cauchy-Problem für inhomogene Wellengleichung: mit $f \in C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ besitzt höchstens eine Lösung.
Lösungsansatz $u = v + w$ mit

$$\begin{aligned}
v_{tt} - v_{xx} &= 0 \\
v(x,0) = v_0(x) &= u_0(x) \\
v_t(x,0) = v_1(x) &= u_1(x) \\
w_{tt} - w_{xx} &= f \\
w(x,0) &= 0 \\
w_t(x,0) &= 0
\end{aligned}$$

Es ergeben sich als eindeutig bestimmte Lösungen:

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2}(v_0(x-ct) + v_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_1(y)\,dy \\
w(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\,ds
\end{aligned}$$

14.6.3 3-dim Wellengleichung

gegeben sind $f(\mathbf{x},t)$, $u_0(\mathbf{x})$ und $u_1(\mathbf{x})$ sowie $c > 0$, gesucht $u(\mathbf{x},t)$ mit

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2\Delta u &= f(\mathbf{x},t) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\
u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}) \quad \text{Anfangsbedingungen} \\
u_t(\mathbf{x},0) &= u_1(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

(Spezialfall einer hyperbolischen Gleichung)

Lösung der homogenen 3-dim Wellengleichung: Für $c = 1$ (sonst Koordinantentransformation) ergibt sich die eindeutig bestimmte Lösung zu ($|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = t$ entspricht Kugeloberfläche $\partial K_t(\mathbf{x})$)

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi t}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=t} u_1(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y}) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=t} u_0(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})\right] \\
&= t\left(\frac{1}{4\pi t^2}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=t} u_1(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[t\left(\frac{1}{t^2}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=t} u_0(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})\right)\right] \\
&= t\,Mu_1(\mathbf{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\left[t\,Mu_0(\mathbf{x},t)\right]
\end{aligned}$$

mit sphärischem Mittelwert $Mg(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial K_t(\mathbf{x})} g(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})$

Lösung der inhomogenen 3-dim Wellengleichung: Analog zur 1-dim Betrachtung ergibt sich:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leqslant t} \frac{f(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \, dy$$

wobei $\frac{f(\mathbf{y}, t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ retadiertes Potential genannt wird.

14.6.4 2-dim Wellengleichung

Abstiegsmethode für homogene Wellengleichung, Lösung ergibt sich durch Definition $u(\mathbf{x}, x_3, t)$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Es zeigt sich, dass auf dem $\mathbb{R}^2$ die Hygensche Eigenschaft nicht erfüllt ist, eine lokale Störung bleibt für alle Zeiten ab der ersten Registrierung bemerkbar.

14.7 Separationsansatz

14.7.1 Fourierreihen

Riemannintegrierbare Funktionen als euklidischen Vektorraum auffassen mit

- Skalarprodukt $< f, g >= \int_{-l}^{l} f(x) \; \overline{g(x)} \, dx$
- Orthonormalsystem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \right\} = \{\varphi_0\} \cup \{\varphi_k, \psi_k\}$$

- Fourierkoeffizienten $a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx$ und $b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}$

$$< f, \varphi_k > \varphi_k = a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \quad \text{und} \quad < f, \psi_k > \psi_k = b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

- Fourierreihe

$$(Ff)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

14.7.2 1-dim Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{mit } x \in (0,l), t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) &= 0 \quad \text{Randwertbedingung} \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{Anfangsbedingungen} \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \end{aligned}$$

mit dem Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

ergibt sich eine Lösung durch Superposition

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)\right] \cdot \sin(\frac{k\pi}{l}x)$$

mit Fourierkoeffizienten $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin(\frac{k\pi}{l}x)\,dx$ sowie $b_k = \frac{2}{ck\pi}\int_0^l u_1(x)\sin(\frac{k\pi}{l}x)\,dx$

14.7.3 Wärmeleitungsgleichung

analog zur Wellengleichung ergibt sich für

$$\begin{aligned} u_t - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{mit } x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 \quad \text{Randwertbedingung} \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{Anfangsbedingungen} \end{aligned}$$

eine Lösung mit Hilfe des Separationsansatzes zu

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \cdot e^{-k^2\pi^2 t}$$

14.7.4 Laplace-Poissson-Gleichung

Separationsansatz führt bei folgendem Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{mit } (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u(0,y) &= u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u(x,\pi) &= g(x) \end{aligned}$$

auf eine Lösung der Form

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh(k\pi) \cdot \sin(kx)$$

15 Komplexe Funktionen

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

f **komplex differenzierbar** in z_0
$\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} := f'(z_0)$
$\Leftrightarrow$ u, v total diffbar in (x_0, y_0) und Cauchy-Riemannsche DGL gelten

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \qquad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

f **holomorph** in $z_0 \Leftrightarrow$ f in Umgebung $K_\delta(z_0)$ komplex diffbar

- f holomorph auf $G \Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$ harmonisch auf G
- u harmonisch auf $G \Rightarrow$ $\exists$ harmonische konjugierte Funktion v mit $f = u + iv$ holomorph

konjugierte Funktion: v heißt konjugierte Funktion zu u (u und v harmonisch) falls $f = u + iv$ holomorph

15.1 Integration komplexer Funktionen

Kurvenintegral: (Γ, g) glatte Kurve, $g(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ zulässige Parameterdarstellung

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(g(t)\dot{g}(t)\,dt$$

Länge definiert als $L(\Gamma) = \int_a^b |\dot{g}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}\,dt$

Cauchy-Integralsatz: $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G. Für jede geschlossene, stückweise stetig diffbare Kurve $\Gamma \subset G$ gilt $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$

Stammfunktion: F heißt Stammfunktion von f $\Leftrightarrow$ F holomorph in G offen und $F'(z) = f(z)$

Cauchy-Integralsatz für Ableitungen: $G \in \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft diffbar und es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta \qquad \forall z \in K_r(z_0)$$

15.2 Singularitätentheorie

Laurentreihenentwicklung: Kreisring $K = K(z_0, r, R)$, f holomorph auf K, dann ist $\forall z \in K$ absolut konvergent

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{f_2} + \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k}_{f_1 \text{ Hauptteil}}$$

mit den eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_o| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}\, d\zeta}$ für alle $k \in \mathbb{Z}_0$ und $r < \rho < R$

f_1 konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\{z : |z - z_0| \geqslant r_1 > r\}$ und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(z_0)}$, f_2 konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\{z : |z - z_0| \leqslant r_2 < R\}$ und ist holomorph auf $K_R(z_0)$

Residuum: Der Hauptteil f_1 beschreibt die Singularitäten von f bei z_0, es wird definiert:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \rho} f(z)\, dz$$

Residuensatz: G einfach zusammenhängend, f holomorph auf $G \backslash \{z_1, \ldots, z_N\}$, Γ stückweise glatte geschlossene Kurve in G und $\{z_1, \ldots, z_N\} \notin \Gamma$, dann folgt:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} n(\Gamma, z_j) \cdot Res(f, z_j)$$

mit Umlaufzahl $n(\Gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_j}$

Allgemeine Cauchy-Integralformel: G einfach zusammenhängend, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G, $z \in G$ beliebig, Γ geschlossene stückweise glatte Kurve in G mit $z \notin \Gamma$, dann gilt:

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Typen von Singularitäten: f holomorph auf $K_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ und $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Laurentreihe

- z_0 hebbare Singularität $:\Leftrightarrow a_{-k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- z_0 Pol n-ter Ordnung von f $:\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ und $a_{-k} = 0$ für alle $k > n$
- z_0 wesentliche Singularität $:\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ für uendlich viele $k \in \mathbb{N}$

15.3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Identitätssatz: $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G, dann sind äquivalent:

1. $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$
2. $\exists$ Menge $M \subset G$, die in G einen Häufungspunkt besitzt, sodass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in M$
3. $\exists\ z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

f **ganze analytische Funktion:** $\Leftrightarrow f$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$

Fundamentalsatz der Algebra: Polynom $P(z)$ mit Grad $= n$ $(n \geqslant 1)$, dann $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$

Maximumprinzip: $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet

- $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G und $|f|$ hat lokales Maximum in $G \Rightarrow f = const$ in G
- $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf G, G beschränkt $\Rightarrow |f(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$ für alle $z \in \bar{G}$

Konforme Abbildung: $u, v \subset \mathbb{C}$ offene Mengen, $f : u \to v$ heiß konforme Abbildung $:\Leftrightarrow f$ bijektiv und holomorph auf u

Riemannscher Abbildungssatz: $G \subset \mathbb{C}$ offen, $G \neq \emptyset$, dann gilt:
G ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow \exists$ konforme Abbildung von G auf Einheitskreis K oder $G = \mathbb{C}$