Analysis - Vordiplom-Zusammenfassung

Vorlesung: Prof. Dr. Schmeißer
Zusammenfassung: Fabian Stutzki

22. September 2008

Die Zusammenfassung bezieht sich auf Analysis I (WS04/05), Analysis II (SS05) und Analysis III (WS05/06). Sie dient der Vorbereitung auf das Vordiplom bei Herrn Prof. Dr. Schmeißer. Fehler (auch bei kleineren Tipfehlern) und Anmerkungen bitte an fabian.stutzki@uni-jena.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle und komplexe Zahlen

1.1 Reelle Zahlen

Bolzano-Weierstraß: Jede unendliche und beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Vollständigkeitsaxiom für Folgen: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

1.2 Komplexe Zahlen

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom P vom Grad $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ besitzt mindestens eine Nullstelle z_0 mit $P(z_0) = 0$.

2 Konvergenz und Stetigkeit

2.1 Grenzwerte von Folgen

2.2 Konvergenz von Reihen

Majoranten, Wurzel, Quotienten, Leibniz

2.3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Zwischenwertsatz (Bolzano): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ (d.h. stetig in jedem Punkt $x \in [a,b]$). Sei $w \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < w < f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = w$

Beweis: oBdA $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ und $w = 0$ (sonst $f(x) - w$ betrachten). Sei

$$\begin{aligned} & M := \{x \in [a,b] : f(x) < 0\} \\ \Rightarrow \quad & M \subset [a,b] \text{ beschränkt und } M \neq \emptyset \\ \Rightarrow \quad & \exists \ \sup M =: \xi \in (a,b) \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass $f(\xi) = 0$. Wähle Folge (x_k) in M mit $x_k \to \xi$. Da f stetig und $f(x_k) < 0$

$$\Rightarrow \quad f(\xi) = f(\lim x_k) = \lim f(x_k) \leqslant 0$$

Annahme $f(\xi) < 0$, dann

$$\begin{aligned} & \exists\ \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(\xi) \cap [a,b] : \quad f(x) < 0 \\ \Rightarrow \quad & \text{Widerspruch zu } \xi = \sup M \\ \Rightarrow \quad & f(\xi) = 0 \end{aligned}$$

Satz vom Minimum / Maximum (Weierstraß): Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig auf K. Dann gilt:

$$f(K) = \{f(z) : \ z \in K\} \subset \mathbb{R} \text{ ist kompakt}$$

und

$$\begin{aligned} \exists U \in K \quad &\wedge \quad V \in K \text{ mit} \\ f(u) &= \inf_{z\in K} f(z) = \inf f(K) \\ f(v) &= \sup_{z\in K} f(z) = \sup f(K) \end{aligned}$$

Beweis: 2.3.3/6

Cauchy-Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz: Beweis: 2.3.7/6

Weierstraß-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz: Beweis: 2.3.7/7

3 Differentiation und Integration (Teil 1)

3.1 Differentiation

1. Mittelwertsatz (Lagrange): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar $\Rightarrow$ $\exists\ \xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

2. Mittelwertsatz (Cauchy): Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar und $g'(x) \neq 0$ auf $(a,b) \Rightarrow \quad \exists\ \xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis: 3.1.2/4

l'Hospitalsche Regel: Seien $x_0 \in [a,b]$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0$ auf (a,b), $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ und $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$. Dann existiert

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Analog für $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

Beweis: 3.1.4/1, folgt aus zweitem Mittelwertsatz

3.2 Stammfunktionen

3.3 Riemannsche Integrale

Dorbouxsche Definition:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine Funktion $\Phi(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar mit $\Phi'(x) = f(x)$. $\Phi(x)$ ist Stammfunktion von f auf $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Beweis: h_n Nullfolge $h_n \neq 0$ und Mittelwertsatz $\exists \xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$

$$\begin{aligned} F(x+h_n) - F(x) &= \int_x^{x+h_n} f(t)\,dt = f(\xi_n)h_n \\ \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} &= \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) \stackrel{\text{stetig}}{=} f(\lim_{n\to\infty} \xi_n) = f(x) \end{aligned}$$

Substitution: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv, stetig, diffbar und $\varphi'(x) \neq 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt$$

4 Differentiation und Integration (Teil 2)

4.1 Klassen integrierbarer Funktionen

4.2 Höhere Ableitungen

Leibnizsche Produktregel: $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar

$$\Rightarrow \qquad \exists \quad (f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

Beweis: 4.2.1/2 durch vollständige Induktion (Serie 16, Aug 1)

Satz von Taylor: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ (n+1)-mal stetig differentierbar, $x, x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt}_{R_n(x)} \end{aligned}$$

Beweis: 4.2.1/3 durch Induktion aus HDI

Mittelwertsatz der Integralrechnung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g(x) \geqslant 0$ auf $[a,b] \Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b)$, so dass

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

Insbesondere gilt für $g(x) = 1$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Integral}} = \underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{Fläche}}$$

Beweis: 4.2.1/5

Restglied nach Lagrange: **Beweis:** 4.2.1/6

4.3 Folgen und Reihen von Funktionen

4.4 Uneigentliche Integrale

4.5 Einfache Differentialgleichungen

5 Differentiation im $\mathbb{R}^n$

5.1 Metrische und normierte Räume

Heine-Borel-Satz: (X, d) metrischer Raum, dann gilt: $K \subset X$ kompakt $\Leftrightarrow$ Aus jeder offenen Überdeckung (U_α) lässt sich eine *endliche* Teilüberdeckung auswählen. Das heißt $K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ mit U_α offen $\Rightarrow \quad \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

5.2 Stetige Funktionen (Abbildungen) in metrischen Räumen

Kontraktion T ist eine Abbildung, die den Abstand zweier Punkte verkleinert:

$$\exists q : 0 < q < 1 \ \forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leqslant q d(x, y)$$

Damit ist eine Kontraktion gleichzeitig Lipschitz-stetig (Lipschitzkonstante $q < 1$).

Banachscher Fixpunktsatz: Sei (X, d) vollständig metrischer Raum (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert), $T : X \to X$ Kontraktion. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt $z \in X$ ($\Leftrightarrow \exists! z \in X : \ T(z) = z$). Das Iterationsverfahren $x_{n+1} = T(x_n)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in X$ gegen den Fixpunkt z, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ in (X, d). Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$d(x_n, z) \leqslant \begin{cases} q^n d(x_0, z)??? \\ \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \end{cases}$$

Beweis: 5.2.3/3: z eindeutig bestimmt: Annahme $T(z^1) = z^1$ und $T(z^2) = z^2$

$$d(z^1, z^2) = d(T(z^1), T(z^2)) \leqslant q \cdot d(z^1, z^2) \Rightarrow \quad \text{Wid. da } 0 < q < 1$$

Existenz von z:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant q^n d(x_1, x_0)$$

für $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \\ \dots &\leqslant q^n d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{m-1-n} q^k \\ &\leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (x_n)_n$ Cauchy-Folge, da Raum vollständig existiert Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = z$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \sum^n a_k b_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2}$$

5.3 Partielle Ableitungen

Satz von Schwarz: Exisieren $f_{,j}$, $f_{,k}$ und $f_{,j,k}$, dann existiert auch $f_{,k,j}$ und es ist $f_{,k,j} = f_{,j,k}$ (Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen)

Beweis: 5.3.2 auf einem 2δ-Quadrat im $\mathbb{R}^2$ betrachten, mit Mittelwertsatz die Ableitung nach x und anschließend nach y konstruieren. Das gleiche nochmal erst für y und dann für $x \Rightarrow$ gleich, wenn $\delta \to 0$

Satz von Taylor im $\mathbb{R}^n$: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \subset C^{m+1}(\Omega)$, $x^0, x \in \Omega$ mit $\forall\ t \in [0,1] : x^0 + t(x - x^0) \in \Omega$ Verbindungsgerade. Dann $\exists\ \vartheta = \vartheta(x^0, x)$ mit $0 < \vartheta < 1$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_m(x) + R_m(x) \\ \text{mit Taylor-Polynom}\quad T_m(x) &= \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \frac{D^\alpha f(x^0)}{|\alpha|!}(x - x^0)^{|\alpha|} \\ \text{und Restglied}\quad R_m(x) &= \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{D^\alpha f(x^0 + \vartheta(x - x^0))}{|\alpha|!}(x - x^0)^{|\alpha|} \end{aligned}$$

Beweis: 5.3.3/3 Betrachte $h(t) = f(x^0 + t(x - x^0))$

$$\Rightarrow \quad h(0) = f(x^0),\ h(1) = f(x)$$

nach Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{j=1}^{n} D_j f(x^0 + t(x - x^0)) \cdot (x_j - x_j^0) \\ \Rightarrow \quad h^{(m)}(t) &= \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} D_{j_m} \dots D_{j_1} f(x^0 + t(x - x^0)) \\ &\quad \cdot (x_{j_1} - x_{j_1}^0) \dots (x_{j_m} - x_{j_m}^0) \end{aligned}$$

Taylor für $n = 1$ ergibt

$$h(t) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} t + \dots + \frac{h^{(m)}(0)}{m!} t^m + \bar{R}_m(t)$$

und somit für $f(x) = h(1)$:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{j=1}^{n} D_j f(x^0)(x_j - x_j^0) + \dots$$

$$\begin{aligned} & \ldots + \frac{1}{|\alpha|!} \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha f(x^0)(x-x^0)^{|\alpha|} \\ \Rightarrow \quad f(x) &= \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \frac{D^\alpha f(x^0)}{|\alpha|!}(x-x^0)^{|\alpha|} + \bar{R}_m(1) \end{aligned}$$

Lokale Extremwerte: 5.3.4, siehe Analysis Zusammenfassung

5.4 Differentierbare Abbildungen

Jacobi-Matrix:

Diffeomorphismus:

Auflösungssatz:

Extrema mit Nebenbedingungen:

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1 Systeme linearer DGLen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Anfangswertproblem: A $n \times n$-Matrix, $b(t)$, $x(t)$, x^0, $\dot{x}(t)$ n-dimensionale Vektoren, gesucht ist $x(t)$, so dass

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad x(0) = x^0$$

Aus linearer Algebra: $\exists!$ reguläre Matrix S, so dass $SAS^{-1} = D$ eine komplexe obere Dreiecksmatrix ist.
Sei $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $\exists!$ Lösung $\chi(t)$ des AWP. Sei

$$\mathbb{L} = \{\chi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \text{ stetig diffbar und } \dot{\chi}(t) = A\chi(t)\}$$

Lösung des homogenen Systems ($b(t) = 0$), dann ist $\mathbb{L}$ komplexer Vektorraum mit $\dim \mathbb{L} = n$. Ferner definiert man den *Anfangswertisomorphismus* $J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{L}$ durch $J(z^0) = \chi(t, z^0)$ für $chi(t, z^0)$ Lösung des Anfangswertes mit $z^0 \in \mathbb{C}$
Für A reell, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $z^0 = u^0 + iv^0$ dann ist $\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\chi} = A\chi + b$ und $\chi(0) = u^0 + iv^0$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= A\varphi(t) + b(t) \\ \varphi(0) &= u^0 \\ \dot{\psi}(t) &= A\psi(t) \\ \psi(0) &= v^0 \end{aligned}$$

6.2 Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

6.3 Existenz- und Unitätssätze

Integraloperator $n = 1$: Gegeben DGL $\dot{x} = f(t,x) \quad x(t_0) = x_0$ auf $a \leqslant t \leqslant b$ und $c < x < d$

$$\begin{aligned} & \varphi(t) : [\alpha,\beta] \to (c,d) \text{ Lösung und stetig diffbar} \\ \Leftrightarrow \quad & \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \\ \Leftrightarrow \quad & \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \end{aligned}$$

Integraloperator:

$$\begin{aligned} (K_j\varphi)(t) &= x_j^0 + \int_{t_0}^{t} v_j(s,\vec{\varphi}(s))\,ds \\ (K\vec{\varphi})(t) &= \begin{pmatrix} (K_1\vec{\varphi})(t) \\ \dots \\ (K_n\vec{\varphi})(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz von Picard-Lindelöf (lokal): Sei $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, so dass $t_0 \in [\alpha,\beta]$, $v(t,x)$ sowie f stetig und Lipschitz-Bedingung $\Rightarrow \quad \exists!$ Integralkurve $\varphi(t)$ mit $\dot{\varphi}(t) = v(t,\varphi(t))$ und $\varphi(t_0) = x^0$

Globaler Existenz- und Unitätssatz: $\dot{x} = f(x,t)$ mit f stetig und Lipschitz-Bedingung in x

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \exists L > 0 : \forall t \in [a,b] \text{ und } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \text{gilt:} \\ & \| f(x_1,t) - f(x_2,t) \| \leqslant L \| x_1 - x_2 \| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \exists!$ Lösung mit $\dot{x} = f(x,t)$ und $x(t_0) = x_0$

Beweis: z.z. Integraloperator ist kontraktiv $\Rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz $\Rightarrow \quad \exists$ eindeutige Lösung

Picard Approximation: für $\varphi^0 \in X$ gilt

$$K^l\varphi^0 = K(K^{l-1}\varphi) \to_{l\to\infty} \varphi \text{ in } X$$

7 Integration im $\mathbb{R}^n$

7.1 n-dimensionale Riemann-Integral

Integration über Rechtecke:

Satz von Fubini: Sei $Q = A \times B$, A k-dim, B l-dim Rechteck. $f(x,y) = f : Q \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar auf Q und

1. Für jedes feste $x \in A$ existiere $\int_B f(x,y)\,dy$, dann ist

$$\int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_Q f = \int_Q f\,d(x,y)$$

2. Für jedes feste $y \in B$ existiere $\int_A f(x,y)\,dx$

$$\int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy = \int_Q f = \int_Q f\,d(x,y)$$

Beweis: 7.1.2/1, dabei zu zeigen:

$$\begin{aligned}\int_Q f\,d(x,y) \ \overbrace{\leqslant}^{\text{z.z.}} \ & \underline{\int_A} \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx \\ \underbrace{\leqslant}_{\text{klar}} \ & \overline{\int_A} \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx \underbrace{\leqslant}_{\text{z.z.}} \int_Q f\,d(x,y)\end{aligned}$$

charakteristische Funktion: Benötigtes Gebiet Ω in Rechteck Q legen und mit charakteristischer Funktion

$$\chi_\Omega(x) =\leqslant \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

integrieren

Normalbereich $B \subset \mathbb{R}^2$ in y-Richtung $\Leftrightarrow$ $\exists\ [a,b] \subset \mathbb{R} \exists\ \varphi, \psi$ stetig, so dass

$$B = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

Mit $f : B \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \quad \int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Jordansche Nullmenge M: :⇔ $\exists$ endlich viele abgeschlossene Rechtecke Q_j, so dass $M \subset \bigcup_j Q_j$ und $\sum_j \mu(Q_j) < \varepsilon$

Jordan-messbar: Beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt jordan-messbar ⇔ Rand $\partial\Omega$ Jordansche Nullmenge

Berechnung durch Transformation: Seien A,B kompakt und Jordan-messbar. Sei $g : A \to B$ stetig diffbar und surjektiv ($g(A) = B$), ferner $N \subset A$ jordansche Nullmenge mit g injektiv und Jacobi-Matrix ungleich Null auf $A \backslash N$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_B f(x)\,dx = \int_A f(g(u)) \left| \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right| du$$

Uneigentliche Integrale: Grenzprozess an Problemstellen, wo f oder Ω unbeschränkt.

7.2 Kurvenintegrale

Parameterdarstellung: $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\Gamma = \{x = \varphi(t) : t \in [a, b]\}$

Bogenlänge von Γ: $L(\Gamma) = \int_a^b \|\dot\varphi(t)\|\ dt = \int_a^b \sqrt{\dot\varphi_1^2(t) + \ldots + \dot\varphi_n^2(t)}\,dt$

Kurvenintegral 1.Art: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig mit Linienelement $ds = \|\dot\varphi(t)\|\ dt$

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\,\|\dot\varphi(t)\|\ dt$$

Kurvenintegral 2.Art: $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld:

$$\int_\Gamma \mathbf{v}\,\mathbf{dx} = \int_a^b \mathbf{v}(\varphi(t)) \cdot \dot\varphi(t)\,dt$$

7.3 Oberflächenintegral im $\mathbb{R}^3$

Parameterdarstellung: $g : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbar, $B \subset G$ kompakt und jordan-messbar und $S = g(B) = \{g(u, v) : (u, v) \in B\}$

Flächeninhalt von S: mit $g_u = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_3}{\partial u}\right)$, $E = g_u \cdot g_u$, $G = g_v \cdot g_v$ und $F = g_u \cdot g_v$

$$\begin{aligned}\omega(S) &= \int_B \|g_u \times g_v\| \; d(u,v) \\ &= \int_B \sqrt{1+g_u^2+g_v^2}\, d(u,v) \\ &= \int_B \sqrt{E\cdot G - F}\, d(u,v)\end{aligned}$$

Oberflächenintegral 1.Art: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig mit Oberflächenelement $dS = \|g_u \times g_v\|\, d(u,v)$

$$\int_S f\, dS = \int_B f(g(u,v))\, \|g_u \times g_v\|\, d(u,v)$$

Oberflächenintegral 2.Art: $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig:

$$\int_S \mathbf{v}\, \mathbf{ds} = \int_B \mathbf{v}(g(u,v)) \cdot [g_u \times g_v](u,v)\, d(u,v)$$

8 Vektoranalysis, Integralsätze

8.1 Vektorfelder

8.2 Integralsätze

Greensche Formel im $\mathbb{R}^n$

Satz von Stokes: $S = g(B)$ kompakte Fläche, ∂S Rand, $g \in C^2(G)$, $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1-Vektorfeld auf Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $S \subset \Omega$. Dann gilt:

$$\int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\,\mathbf{ds} = \int_{\partial S} \mathbf{v}\,\mathbf{dx}$$

Beweis: 8.2.2/5 durch Rückführung auf Greensche Formel im $\mathbb{R}^2$

Satz von Gauß-Ostrogradski: B Normalbereich, $\mathbf{n}$ äußerer Normalenvektor an Rand ∂B, $B \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω offen, $\mathbf{v}$ C^1-Vektorfeld auf Ω. Dann gilt:

$$\int_B \mathbf{div}\,\mathbf{v}\, dx = \int_{\partial B} \mathbf{vn}\, ds$$

Greensche Sätze: B zulässiger Bereich (also Satz von Gauß anwendbar), $B \subset \Omega$, $u, v \in C^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$\int_B u\Delta v\, dx = \int_{\partial B} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\, ds - \int_B \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v\, dx$$

und

$$\int_B [u\Delta v - v\Delta u]\, dx = \int_{\partial B} \left[u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]$$

8.3 Ergänzungen

Flächenintegrale im $\mathbb{R}^n$, Oberfläche der Einheitskugel, Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

9 Partielle Differentialgleichungen

9.1 Laplace-Poisson-Gleichung

u **harmonisch** auf $\Omega \Leftrightarrow u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ auf Ω

Ferner: $u = u(|x|)$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (mit $n \geqslant 2$)

$$\Leftrightarrow u(x) = \begin{cases} b \ln |x| + c & n = 2 \\ \frac{b}{|x|^{n-2}} + c & n > 2 \end{cases}$$

Fundamentallösung der Laplace-Lösung: Für $x \neq y$ setze

$$\Gamma(x, y) := \Gamma(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - y| & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & n > 2 \end{cases}$$

Greensche Darstellungsformel: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zulässiges Gebiet, Ω offen, $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $\mathbf{n}(x)$ äußerer Normalenvektor an $x \in \partial\Omega$. Für alle $y \in \Omega$ gilt:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}(x)}(x, y) - \Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) \right] dS(x) + \int_\Omega \Gamma(x, y) \Delta u(x)\, dx$$

Beweis: 5.1.2/9 ...

Greensche Funktion: Für u harmonisch und Greensche Funktion $G(x, y) = \Gamma(x, y) + \Phi(x, y)$ mit $\Delta_x \Phi(x, y) = 0 \quad \forall y \in \Omega$ und $G(x, y) = 0$ für $y \in \Omega$ und $x \in \partial\Omega$ folgt aus Greenscher Darstellungsformel:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}(x)}(x, y) dS(x)$$

Poissonsche Darstellungsformel: Sei $\varphi : \partial K \to \mathbb{C}$ stetig und

$$u(y) = \frac{1 - |y|^2}{|\omega_n|} \int_{\partial K} \frac{\varphi(x)}{|x - y|^n} \, dS(x)$$

Dann gilt:

$$\Delta u(y) = 0 \quad \text{auf} \quad K$$

und

$$\forall y^0 \in \partial k : \quad \lim_{y \to y^0} u(y) = \varphi(y^0)$$

Beweis: 9.1.3/5 ...

Mittelwerteigenschaft: $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch auf $\Omega :\Leftrightarrow \Delta u(x) \geqslant 0$ auf Ω
$u \in C^2(\Omega)$ superharmonisch auf $\Omega :\Leftrightarrow \Delta u(x) \leqslant 0$ auf $\Omega \Leftrightarrow -u$ subharmonisch

sphärische Mittelwerteigenschaft: Für u subharmonisch ($\Delta u \geqslant 0$) gilt auf jeder Kugel $K_R(y)$ mit $\bar{K_R}(y) < \Omega$:

$$u(y) \leqslant \frac{1}{|\partial K_R|} \int_{\partial K_R(y)} u(x) \, dx$$

(Analog auch für u superharmonisch oder harmonisch)

Kugel-Mittelwerteigenschaft: Für u subharmonisch ($\Delta u \geqslant 0$) gilt auf jeder Kugel $K_R(y)$ mit $\bar{K_R}(y) < \Omega$:

$$u(y) \leqslant \frac{1}{|K_R|} \int_{K_R(y)} u(x) \, dx$$

(Analog auch für u superharmonisch oder harmonisch)

Beweis: 9.1.4/2 ...

Max- und Minprinzip: starkes Max-Min-Prinzip: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \geqslant 0$ subharmonisch auf Ω und $\exists\ y^0 \in \Omega$ mit $u(y^0) = \sup_{y \in \Omega} u(y)$, dann ist $u = const$
Analoge Aussage für u superharmonisch und $\exists y^0 \in \Omega$ mit $u(y^0) = \inf_{y \in \Omega} u(y)$, dann ist $u = const$.

schwaches Max-Min-Prinzip: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dann gilt:

$$u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega \text{ falls } \Delta u(x) \geqslant 0 \text{ auf } \Omega$$
$$u(x) \geqslant \min_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega \text{ falls } \Delta u(x) \leqslant 0 \text{ auf } \Omega$$

Beweis: 9.1.5/1 folgt aus Kugelmittelwert-Eigenschaft und anschließender Abschätzung, gleiche Konstante ergibt sich durch stetigen Polygonzug von y^0 nach y und endlich viele Schritte durch Iteration

Newton-Potential: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes zulässiges Gebiet, mit gegebenem $f \in C(\bar{\Omega})$, gesucht ist das Newton-Potential u mit $-\Delta u = f$
Lösung: mit folgenden Eigenschaften

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(|x-y|)\,\Delta f(y)\,dy$$

- $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$
- $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma(|x-y|)\,f(y)\,dy$
- für $n \geqslant 3$: $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$

9.2 Cauchy-Probleme

siehe Zusammenfassung

9.3 Separationsansatz (Fouriersche Methode)

Fourier-Reihen, Laplace-Poisson-Gleichung

10 Komplexe Funktionen

10.1 Komplexe Differentierbarkeit

Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichung: $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differentierbar $\Leftrightarrow$ u,v (total) diffbar in (x_0, y_0) und die CRD gelten im Punkt (x_0, y_0):

$$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x$$

Beweis: 10.1.2/1 folgt aus vorhergehendem Satz: f diffbar in $z_0 \Leftrightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \frac{f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)}{z - z_0} \to_{z \to z_0} 0$$

Real- und Imaginärteil trennen. ???

konjugierte Funktion: Sei $G \in \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet, u harmonisch auf $G \Rightarrow \quad \exists\ v$ harmonisch auf G, dass $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph auf G (v heißt dann konjugierte Funktion)

Beweis: 10.1.2/5 Betrachte Vektorfeld $(-u_y, u_x)$, da u harmonisch gilt $(-u_y)_y = (u_x)_x \Rightarrow \quad \exists\ v$ mit $\mathbf{grad}\, v = (-u_y, u_x) \Rightarrow$ aus Satz von Schwarz $\Delta v = -u_{yx} + u_{xy} = 0$ auch v harmonisch

Potenzreihen als holomorphe Funktionen: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ für $|z - z_0| < R$, dann gilt:

1. f beliebig oft komplex differentierbar (insbesondere holomorph) auf $D = K_R(z_0)$

$$f^{(j)} = \sum_{k=j}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k - j + 1)(z - z_0)^{k-j}$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

Über Potenzreihen ist die Exponentialfunktion definiert und damit auch:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

10.2 Integration

komplexe Kurvenintegrale:

Stammfunktion: ...

Satz von Gursat: $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \in G$ ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

Beweis: Dreieck in vier kleinere unterteilen und Interativ vorgehen

Verschärfung: holomorph überall bis auf einen punkt a, dann gilt Aussage trotzdem

Cauchy-Integralsatz: G einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene stückweise stetig differentierbare Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

Beweis: zu zeigen, dass f eine Stammfunktion F bestitzt. Definieren $F(z)$ für einen beliebigen stetigen Polygonzug $\Gamma : z \to z_0$. Definition ist aber unabhängig von Auswahl von $\Gamma \Rightarrow \quad F$ ist Stammfunktion für f

Cauchy-Integralformel für Ableitungen: $G \in \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft diffbar und es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad \forall z \in K_r(z_0)$$

Riemannscher Hebbarkeitssatz: $G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$

1. f holomorph in $G \backslash \{z_0\}$ und stetig in $z_0 \Rightarrow \quad f$ holomorph in z_0
2. f holomorph in $G \backslash \{z_0\}$ und beschränkt in $K_\delta(z_0) \Rightarrow \quad \exists$ holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ mit $h(z) = f(z)\ \forall z \neq z_0$

10.3 Singularitätentheorie

Laurentreihenentwicklung: Kreisring $K = K(z_0, r, R)$, f holomorph auf K, dann ist $\forall z \in K$ absolut konvergent

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{f_2} + \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k}_{f_1 \text{ Hauptteil}}$$

mit den eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_o| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}\, d\zeta}$ für alle $k \in \mathbb{Z}_0$ und $r < \rho < R$
f_1 konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\{z : |z - z_0| \geqslant r_1 > r\}$ und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{K_r(z_0)}$, f_2 konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\{z : |z - z_0| \leqslant r_2 < R\}$ und ist holomorph auf $K_R(z_0)$

Residuum: Der Hauptteil f_1 beschreibt die Singularitäten von f bei z_0, es wird definiert:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)\, dz$$

Residuensatz: G einfach zusammenhängend, f holomorph auf $G \backslash \{z_1, \ldots, z_N\}$, Γ stückweise glatte geschlossene Kurve in G und $\{z_1, \ldots, z_N\} \notin \Gamma$, dann folgt:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} n(\Gamma, z_j) \cdot Res(f, z_j)$$

mit Umlaufzahl $n(\Gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_j}$

Allgemeine Cauchy-Integralformel: G einfach zusammenhängend, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G, $z \in G$ beliebig, Γ geschlossene stückweise glatte Kurve in G mit $z \notin \Gamma$, dann gilt:

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Typen von Singularitäten: f holomorph auf $K_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ und $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Laurentreihe

- z_0 hebbare Singularität $:\Leftrightarrow a_{-k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- z_0 Pol n-ter Ordnung von f $:\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ und $a_{-k} = 0$ für alle $k > n$
- z_0 wesentliche Singularität $:\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ für uendlich viele $k \in \mathbb{N}$

10.4 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Identitätssatz: $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G, dann sind äquivalent:

1. $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$
2. $\exists$ Menge $M \subset G$, die in G einen Häufungspunkt besitzt, sodass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in M$
3. $\exists\ z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

f **ganze analytische Funktion:** $\Leftrightarrow f$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$

Fundamentalsatz der Algebra: Polynom $P(z)$ mit Grad $= n$ $(n \geqslant 1)$, dann $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$

Maximumprinzip: $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet

- $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G und $|f|$ hat lokales Maximum in $G \Rightarrow f = const$ in G
- $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf G, G beschränkt $\Rightarrow |f(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$ für alle $z \in \bar{G}$

Konforme Abbildung: $u, v \subset \mathbb{C}$ offene Mengen, $f : u \to v$ heiß konforme Abbildung $:\Leftrightarrow$ f bijektiv und holomorph auf u

Riemannscher Abbildungssatz: $G \subset \mathbb{C}$ offen, $G \neq \emptyset$, dann gilt:
G ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\exists$ konforme Abbildung von G auf Einheitskreis K oder $G = \mathbb{C}$